МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
«ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЇВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ»
Факультет комп'ютерних наук та технологій
Кафедра вищої математики

KAI

Методичні рекомендації для підготовки студента

до практичних занять

з дисципліни «Вища математика»

для студентів 1 курсу

Освітньо-професійна програма:
«Хімічні технології лікарських речовин та медичних виробів»

Галузь знань: G «Інженерія, виробництво та будівництво»
Спеціальність: G1 «Хімічні технології та інженерія»

Укладач: к.т.н., доц. Петрусенко В.П.

Розглянуто та схвалено

на засіданні кафедри вищої математики

Протокол № від «17» 30. 09. 2025 р.

Завідувач кафедри Іван ЛАСТІВКА

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1.1

Визначники 2-го, 3-го та -го порядків, їхні властивості та способи обчислення

Приклад 1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. а) За формулою $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

маємо: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - (-6)(-3) = -20$;

б) За формулою

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 \cdot (-5) +$$

$$+ 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) - 1 \cdot 2 \cdot 0 - (-2) \cdot 3 \cdot (-2) = 30.$$

Приклад 2. Обчислити визначник, розклавши його за

елементами рядка (стовпця): $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Щоб розкласти визначник за елементами рядка (стовпця), доцільно спочатку всі елементи, крім одного, цього рядка (стовпця) перетворити на нулі, користуючись властивостями визначників. Утворимо нульові елементи в другому стовпці визначника. Для цього:

- до третього рядка додамо перший, попередньо помножений на (-3);
- віднімемо від першого рядка четвертий.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ -11 & 0 & -7 & 7 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$$

За теоремою Лапласа:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -11 & -7 & 7 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -312.$$

Домашнє завдання

1. Обчислити визначники другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+b & -2(a+b) \\ b & a-b \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) -5; б) $(a+b)^2$.

2. Обчислити визначники третього порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 14 & 3 & 2 \\ 21 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

Відповідь: а) -8; б) 118; в) -9.

3. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Відповідь: а) 0; б) -8.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1.2

Матриці, дії над матрицями. Обернена матриця. Матричні рівняння. Ранг матриці

Приклад 1. Знайти добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв’язання. Користуючись означенням добутку матриць, маємо:

а)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 + 1\cdot(-3) + 3\cdot 5 \\ 0\cdot 2 + 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 5 \\ 7\cdot 2 + 5\cdot(-3) + 0\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix};$$

б)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+6+12 & 3-6 & -5-1-9 \\ 8+12 & 6 & 20-2 \\ 14+6-8 & 3+4 & 35-1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -3 & -15 \\ 20 & 6 & 18 \\ 12 & 7 & 40 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти матрицю обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Знаходимо обернену матрицю за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо необхідну умову існування оберненої матриці. Знайдемо визначник, складений з елементів матриці A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -47.$$

Матриця невироджена, отже, обернена матриця існує.

Далі знаходимо алгебраїчні доповнення A_{ij} за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – мінор елемента a_{ij} даного визначника.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10.$$

Отже, $$A^{-1} = \frac{1}{-47}\begin{pmatrix} -5 & 8 & -17 \\ -8 & -6 & 1 \\ -14 & 13 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/47 & -8/47 & 17/47 \\ 8/47 & 6/47 & -1/47 \\ 14/47 & -13/47 & 10/47 \end{pmatrix}.$$

Домашнє завдання

1. Знайти добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$.

2. Знайти матрицю $AB - BA$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \\ -8 & -9 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Знайти обернені матриці для матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -11 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

Завдання 5. Знайти обернені матриці:

A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; C=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

Завдання 6. Визначити ранги квадратних матриць:

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; C=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 7. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1.3-1.4

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера, матричним методом та методом Гаусса. Теорема Кронекера-Капеллі

Приклад 1 Дослідити сумісність системи рівнянь.

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ r(A) = 2;$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right),\ r(B) = 3;$$

$r(A) \neq r(B)$ **— система несумісна.**

***Відповідь*: система несумісна.**

Приклад 2 Дослідити систему на сумісність і знайти кількість розв'язків.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ r(A) = 2;$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right),\ r(B) = 2.$$

$2 = r(A) = r(B) \neq 3 = n$ **— безліч розв'язків, система невизначена.**

***Відповідь*: система невизначена**

Приклад 3 Дослідити систему на сумісність і знайти кількість розв'язків.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 3;$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -2 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \; r(B) = 3.$$

$r(A) = r(B) = 3 = n$ **— система визначена.**

***Відповідь*: система визначена.**

Домашнє завдання

Розв'язати системи лінійних рівнянь.

Приклад 1 Визначити, при яких *a* і *b* система

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

а) має єдиний розв'язок;
б) не має розв'язків;
в) має нескінченну кількість розв'язків.

Дослідити систему на сумісність і знайти кількість розв'язків.

Приклад 1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

***Відповідь*: *r*(A) = *r*(B) = 3**

Приклад 2

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

***Відповідь*: r(A) = r(B) = 2.**

Приклад 3

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5. \end{cases}$$

***Відповідь*: r(A) = 1, r(B) = 2.**

Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь: Крамера, Гаусса, матричний метод

Приклад 1. Розв'язати систему методом Крамера

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = -1, \\ 4x - 5y - z = -5, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

Розв'язання. За формулами Крамера $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}, y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}, z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$

Обчислимо визначники $\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z.$ Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -11; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & -5 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -11;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -22; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 11.$$

Отже, $x = \dfrac{-11}{-11} = 1; \quad y = \dfrac{-22}{-11} = 2; \quad z = \dfrac{11}{-11} = -1.$

Приклад 2. Розв'язати систему методом Гауса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Віднімемо від першого рядка другий; додамо до третього рядка перший, помножений на (-2); від першого рядка віднімемо четвертий:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Переставимо другий і четвертий стовпці:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right).$$

Додамо до третього рядка другий, помножений на (-3):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right).$$

Четвертий рядок, помножений на 13, додамо до подвоєного третього рядка:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & -25 \end{array}\right).$$

Зі здобутої матриці складемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_3 - x_2 = 2; \\ -x_4 + 4x_3 - 2x_2 = 1; \\ -13x_3 + 7x_2 = 1; \\ -25x_2 = -25. \end{cases}$$

Звідки, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Приклад 3. Розв’язати систему рівнянь матричним методом

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 3x + 4y + z = 1, \\ 5x + y - 3z = -2. \end{cases}$$

Розв’язання. Нехай

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, тоді СЛР набуває вигляду $AX = B$, звідки $X = A^{-1}B$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 32.$$

Отже, обернена матриця A^{-1} до матриці A існує.

Далі знаходимо алгебраїчні доповнення A_{ij} кожного елемента a_{ij} даного визначника.

$A_{11} = -13$; $\quad A_{21} = 5$; $\quad A_{31} = 6$;

$A_{12} = 14$; ; $\quad A_{22} = 2$; $\quad A_{32} = -4$;

$A_{13} = -17$; $\quad A_{23} = 9$; $\quad A_{33} = -2$.

$$A^{-1} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -13 & 5 & 6 \\ 14 & 2 & -4 \\ -17 & 9 & -2 \end{pmatrix},$$

тоді $X = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -13 & 5 & 6 \\ 14 & 2 & -4 \\ -17 & 9 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Домашнє завдання

1. Розв'яжіть системи лінійних рівнянь методом Крамера.

а) $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 2x-y-2=1, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+y+z=2, \\ 3x+2y+2z=3. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y+z=5, \\ 3x+4y-2z=-3, \\ x-3y+z=4. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-2y+3z=-5, \\ 4x+2y-3z=0, \\ 3x-3y+5z=-9. \end{cases}$

Відповідь: а) (1; -1; 2); б) безліч розв'язків; в) (1;0;3); г) (-1;2;0).

2. Розв'яжіть системи лінійних рівнянь методом Гауса.

а) $\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x-y+z=3, \\ 3x+2y+2z=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+2z=2, \\ 4x+3y-4z=7, \\ 4x+8y-12z=3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-3y+5z=0, \\ 8x+2y-z=21, \\ 2x+11y-16z=21. \end{cases}$

Відповідь: а) (0;-1;2); б) $\otimes$; в) $(\frac{1}{4}(9-z); \frac{1}{2}(3z+3); z), z \in R.$

3. Розв'язати матричним методом системи рівнянь.

а) $\begin{cases} 2x-y+z=5, \\ 3x+4y-2z=-3, \\ x-3y+z=4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+3z=-5, \\ 4x+2y-3z=0, \\ 3x-3y+5z=-9. \end{cases}$

Відповідь: а) (1;0;3); б) (-1;2;0).

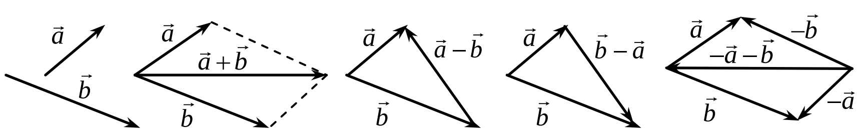
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1.5-1.6

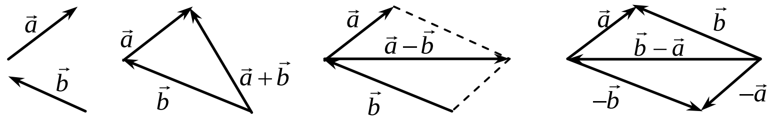
Вектори, лінійні дії та операції над ними. Вектори в системі координат. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

Приклад 1. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$

Розв'язання





Приклад 2. Вектори $\vec a$ і $\vec b$ утворюють кут $\varphi = 60°$, $|\vec a| = 5$, $|\vec b| = 8$. Знайти $|\vec a+\vec b|$ і $|\vec a-\vec b|$.

Розв'язання.

$$\left|\vec a+\vec b\right| = \sqrt{\left|\vec a+\vec b\right|^2} = \sqrt{|\vec a|^2 + 2\cdot|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\varphi + |\vec b|^2} =$$

$$= \sqrt{25+2\cdot5\cdot8\cdot\cos 60°+64} = \sqrt{25+64+80\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{129}\,.$$

$$\left|\vec a-\vec b\right| = \sqrt{\left|\vec a-\vec b\right|^2} = \sqrt{|\vec a|^2 - 2|\vec a|\cdot|\vec b|\cos\varphi + |\vec b|^2} = \sqrt{5^2+64-40} = 7.$$

Приклад 3. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ та їх довжину, якщо $A(5;\,-1;\,2)$, $B(1;\,2;\,1)$.

Розв'язання.

$\overrightarrow{AB}\{-4;\ 3;\ -1\}$, $\overrightarrow{BA}\{4;\ -3;\ 1\}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$.

Приклад 4. Визначити початок вектора $\vec a\{2;\,-3;\,-1\}$, якщо його кінець збігається з точкою $\{1;\,-1;\ 2\}$.

Розв'язання. Нехай кінець міститься в точці $A(1;\ –1;\ 2)$, а початок — у точці $B(x;\ y;\ z)$; тоді вектор $\overrightarrow{BA} = \vec a$ має координати $\{2;\ –3;\ –1\}$ = $= \{1-x;\,-1-y;\,2-z\}$; $1-x=2$; $-1-y=-3$; $2-z=-1$; $x=-1$; $y=2$; $z=3$.

Отже, $B(–1;\ 2;\ 3)$.

Приклад 5. Знайти координати вектора $\vec a$, якщо відомі кути $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$, які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz, і його довжина $|a| = 4$.

Розв'язання.

$$a_x = |\vec a|\cdot\cos\alpha = 4\cdot\frac{1}{\sqrt2} = 2\sqrt2;$$

$$a_y = |\vec a|\cdot\cos\beta = 4\cdot\frac12 = 2,\ \ a_z = 4\cdot\cos120° = -2;\ \ \vec a\left\{2\sqrt2;\ 2;\,-2\right\}.$$

Приклад 6. Чи може вектор утворити з координатними осями кути:

$$\alpha = 60°,\ \beta = 120°,\ \gamma = 45°?$$

Розв'язання. $\cos^2 60° + \cos^2 120° + \cos^2 45° = \frac14 + \frac12 + \frac12 = 1$.

Відповідь: так.

Приклад 7. Визначити, при яких значеннях α, β вектори $\vec a\{-6;\ \beta;\ 2\}$, $\vec b\{\alpha;\ 4;\ -1\}$ — колінеарні.

Розв'язання. За умовою колінеарності двох векторів:

$$\frac{-6}{\alpha} = \frac{\beta}{4} = \frac{2}{-1} = -2\,;\ \beta = -8,\ \alpha = 3\,.$$

Приклад 8. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін

$$M(1;\,-1),\ N(-2;\ 4);\ P(-3;\ 2)\,.$$

Розв'язання. За формулами координат середини відрізка:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A+x_B}{2}=1, & \dfrac{y_A+y_B}{2}=-1, \\ \dfrac{x_A+x_C}{2}=-2, & \dfrac{y_A+y_C}{2}=4, \\ \dfrac{x_B+x_C}{2}=-3, & \dfrac{y_B+y_C}{2}=2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A=2-x_B, & y_A=-2-y_B, \\ x_A=-4-x_C, & y_A=8-y_C, \\ x_B+x_C=-6, & y_B=4-y_C; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A=2-x_B, & y_A=-2-y_B, \\ -2+x_B=4+x_C, & 2+y_B=-8+y_C, \\ 6+x_C+x_C=-6, & -10+y_C+y_C=4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A=2-x_B,\ y_A=-2-y_B, \\ x_B=6+x_C,\ y_B=-10+y_C, \\ x_C=-6, \quad y_C=7; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C=-6,\ y_C=7, \\ x_B=0, \quad y_B=-3, \\ x_A=2, \quad y_A=1 \end{cases} \Rightarrow C(-6;\,7);\ B(0;\,-3);\ A(2;1).$$

Домашнє завдання

Приклад 1. Дано: $|\vec{a}|=11,\ |\vec{b}|=23,\ |\vec{a}-\vec{b}|=30.$ Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Відповідь: $|\vec{a}+\vec{b}|=20.$

Приклад 2. Визначте $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b},\ |\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=12.$

Відповідь: $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=13.$

Приклад 3. Три сили $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,$ прикладені в одній точці і мають взаємно перпендикулярні напрями. Визначте модуль їх рівнодійної, якщо $|\vec{F}_1|=10$Н, $|\vec{F}_2|=11$Н, $|\vec{F}_3|=2$Н.

Відповідь: 15Н.

Приклад 4. У ромбі *ABCD* дано вектори-діагоналі $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$.

Розкласти за цими векторами всі вектори-сторони ромба: $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DA}$.

Відповідь: $\overrightarrow{AB}=\dfrac{\vec{a}}{2}-\dfrac{\vec{b}}{2};\ \overrightarrow{BC}=\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{\vec{b}}{2};\ \overrightarrow{CD}=-\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{\vec{b}}{2};\ \overrightarrow{DA}=\dfrac{\vec{a}}{2}-\dfrac{\vec{b}}{2}.$

Приклад 5..Знайти точку *N*, з якою збігається кінець вектора $\vec{a}\{3;-1;\ 4\}$, якщо його початок збігається з точкою *M* (1; 2; –3).

Відповідь: *N*(4; 1; 1).

Приклад 6. Дано точки *A*(5; 0; 2), *B*(–3; 3; –1), *C*(1; 2; –3), *D*(5; –4; 3). Чи можуть вони бути вершинами трапеції?

Відповідь: не можуть.

Приклад 7. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ та їхні довжини:

1) *A*(4; –5; 2), *B*(2; –3; 1), 2) *A*(7; 3; –2), *B*(4; 3; 2), 3) *A*(3; –2; 2), *B*(–1; 0; 2).

Відповідь: 1) $(-2;\ 2;\ -1);\ 3$; 2) $(-3;\ 0;\ 4);\ 5$; 3) $(-4;\ 2;\ 0);\ 2\sqrt{5}.$

Приклад 8.Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz*, і його довжина:

1) $|\vec{a}|=4,\ \alpha=60^{\circ};\ \beta=45^{\circ};\ \gamma=60^{\circ};$

2) $|\vec{a}|=8,\ \alpha=135^{\circ};\ \beta=60^{\circ};\ \gamma=60^{\circ}.$

Відповідь: 1) $(2;\ 2\sqrt{2};\ 2)$; 2) $(-2\sqrt{2};\ 2;\ 2)$.

Приклад 9. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути $\alpha = 45^o$; $\beta = 60^o$; $\gamma = 135^o$?

Відповідь: не може.

Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

Приклад 1. Знайти косинуси кутів, які вектор $\overline{AB}$ утворює з осями координат, якщо $A(1;2;3), B(2;4;5)$.

Розв'язання. Знайдемо проекції вектора $\overline{AB}$ на осі Ox, Oy, Oz:

$$np_{Ox}\ \vec{AB} = 2 - 1 = 1;$$

$$np_{Oy}\ \vec{AB} = 4 - 2 = 2;$$

$$np_{Oz}\ \vec{AB} = 5 - 3 = 2.$$

Довжина вектора $\vec{AB}$:

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{AB}\right|} = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{AB}\right|} = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{AB}\right|} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 2. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (2;-3;1)$, $\vec{b} = (-1;0;4)$

Розв'язання. Косинус кута між векторами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ знайдемо за формулою:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{2\cdot(-1) + (-3)\cdot 0 + 1\cdot 4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+0+16}} = \frac{2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{138}}.$$

Приклад 3. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (2;1;0)$, $\vec{b} = (0;-2;1)$.

Розв'язання. Діагоналі паралелограма $(\vec{a} + \vec{b})$ та $(\vec{a} - \vec{b})$.

Знайдемо координати цих векторів:

$(\vec{a} + \vec{b}) = (2;-1;1)$, $(\vec{a} - \vec{b}) = (2;3;-1)$.

Вектори $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, тому що їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Приклад 4. У трикутнику з вершинами $A(3;1;4)$, $B(7;-4;4)$, $C(3;5;1)$ знайти висоту $h = \left|\vec{BD}\right|$.

Розв'язання. Із формули: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$, де $a = \left|\overrightarrow{AC}\right|$, $h = \left|\overrightarrow{BD}\right|$ маємо $h = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \frac{2S_{\Delta}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$. Площа трикутника є половина площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ є модуль векторного добутку цих векторів. Тому

$$\vec{S}_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times \overrightarrow{AC}\right|,\ \overrightarrow{AB}\times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (4;-5;0)$, $\overrightarrow{AC} = (0;4;-3)$.

Отже,

$$\vec{S}_{\Delta} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}\mathrm{I} = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{625} = \frac{25}{2}(кв.од)$$

Знаходимо довжину основи $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ даного трикутника:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = 5(од).$$

Тоді $h = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \dfrac{2\cdot\frac{25}{2}}{5} = 5(од)$.

Приклад 5. Дано вершини піраміди $ABCS$: $A(6;4;11)$, $B(0;4;2)$, $C(9;0;9)$, $S(5;2;6)$. Знайти довжину висоти SO, опущеної з вершини S на основу ABC.

Розв'язання. Із формули: $V = \frac{1}{3}S_{осн}H$, де $S_{осн}$ - площа трикутника ABC, що є основою піраміди $ABCS$, V - об'єм піраміди $ABCS$, знайдемо H - довжину висоти SO, що опущена з вершини S даної піраміди на основу: $H = \frac{3V}{S_{осн}}$

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Отже,

$$\vec{S}_{осн} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times \overrightarrow{AC}\right|,\ \overrightarrow{AB}\times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (-6;0;-9)$, $\overrightarrow{AC} = (3;-4;-2)$.

Отже, $\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & -0 & -9\\ 3 & -4 & -2\end{vmatrix}=-39\vec{i}-39\vec{j}+39\vec{k}$.

Тоді

$\vec{S}_{осн}=\frac{1}{2}\sqrt{39^2+39^2+39^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4563}(кв.од)$.

Об'єм піраміди $ABCS$ дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{SA},\vec{SB},\vec{SC}$, а об'єм паралелепіпеда $V_{пар}=\left|\vec{SA}\vec{SB}\vec{SC}\right|$.Отже, знайдемо мішаний добуток

$\vec{SA}\vec{SB}\vec{SC}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -5 & 2 & -4\\ 4 & -2 & 3\end{vmatrix}=6$, тоді

$V_{пір}=\frac{1}{6}V_{пар}=1(куб.од)$.

Тому довжина висоти $H=SO=\frac{6}{\sqrt{4563}}\approx\frac{6}{66}=0{,}09(од.)$.

Домашнє завдання

1. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(0;3;-4)$, $\vec{b}=(6;4;3)$.

Відповідь: 0.

3. Кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює $\frac{2\pi}{3}$, довжини векторів $\left|\vec{a}\right|=4,\left|\vec{b}\right|=3$.

Обчислити: а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$.

Відповідь: а) 6; б) 13.

4. На площині задано трикутник з вершинами $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(2;0)$. Знайти кут, утворений стороною BC і медіаною CM цього трикутника.

Відповідь. $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.

5. Об'єм піраміди $V=5$, три її вершини лежать у точках $A(2;-1;1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо , що вона лежить на осі Oy.

Відповідь: $D_1(0;8;0), D_2(0;-7;0)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1.7

Рівняння прямої на площині. Рівняння прямої і площини у просторі

Приклад 1. Дано точки $M_1(0;1), M_2(1;-3), M_3(0;-2)$ – вершини трикутника $M_1M_2M_3$. Складіть:

1) загальне рівняння сторони M_1M_2;

2) канонічне рівняння висоти M_1D;

3) параметричне рівняння медіани M_2M.

Розв'язання. 1) Оскільки відомі координати точок $M_1(0;1), M_2(1;-3)$, то згідно з рівнянням

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ маємо

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{-3-1}, \quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-4}, \quad y-1=-4x,$$

звідки $4x+y-1=0$ – загальне рівняння прямої, що містить сторону M_1M_2;

2) щоб записати канонічне рівняння прямої, потрібно знайти точку, через яку проходить пряма, і напрямний вектор. Вектор $\overrightarrow{M_2M_3}=\{-1;1\}$ для висоти M_1D є нормальним вектором, тоді вектор $\vec{a}=\{1;1\}$ буде перпендикулярним до вектора $\overrightarrow{M_2M_3}$, оскільки скалярний добуток $\overrightarrow{M_2M_3}\cdot\vec{a}=0$. Тепер записуємо канонічне рівняння прямої M_1D:

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{1}.$$

3) оскільки точка M – середина відрізка M_1M_3, то

$$x_M=\frac{0+0}{2}=0, \; y_M=\frac{1-2}{2}=-0{,}5.$$

Вектор $\overrightarrow{M_2M}=\{0-1;\,-0{,}5+3\}=\{-1;2{,}5\}$ – напрямний вектор прямої M_2M. За напрямний вектор можна взяти також вектор $\vec{a}=2\overrightarrow{M_2M}=\{-2;\,5\}$.

Отже, $l=-2, m=5$ і параметричне рівняння медіани записуємо так:

$$\begin{cases} x=1-2t, \\ y=-3+5t, \end{cases} \quad t\in R.$$

Приклад 2. Записати рівняння прямої у відрізках на осях, що проходить через точку $M_0(-1;2)$ і має напрямний вектор $\vec{S}\{3;-1\}$. Знайти відстань від початку координат до прямої.

Розв'язання. Підставляючи координати точки $M_0(-1;2)$ та напрямного вектора $\vec{S}\{3;-1\}$ у канонічне рівняння прямої, отримаємо

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}\Rightarrow\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1};$$

$$-x-1=3y-6;$$

$x+3y-5=0$ — загальне рівняння прямої.

Поділивши рівняння прямої на 5, отримаємо:

$\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{5/3}=1$ — рівняння прямої у відрізках на осях.

За формулою $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ знаходимо відстань від початку координат до прямої $x+3y-5=0$, маємо

$$d=\frac{|0+3\cdot 0-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Приклад 3. Знайти гострий кут між прямими $y=-3x+7$ та $y=2x+1$.

Розв'язання. Кутові коефіцієнти прямих $y=-3x+7$ і $y=2x+1$ відповідно дорівнюють $k_1=-3, k_2=2$. Тоді за формулою $tg\varphi=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$ маємо

$$tg\varphi=\left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)\cdot 2}\right|=1, \text{ тобто } \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Отже, кут між прямими $y=-3x+7$ і $y=2x+1$ відповідно дорівнює $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Домашнє завдання

1. Дано координати двох точок $M_1(1;\,2)$, $M_2(-1;\,0)$. Записати:

1) загальне рівняння прямої;

2) параметричне рівняння прямої.

Відповідь: 1) $x-y+1=0$; 2) $\begin{cases} x=-2t+1, \\ y=-2t+2 \end{cases}$.

2. Дано загальне рівняння прямої $12x-5y-65=0$. Записати:

1) рівняння з кутовим коефіцієнтом;
2) рівняння у відрізках;
3) нормальне рівняння.

Відповідь: 1) $y=\dfrac{12}{5}x-13$; 2) $\dfrac{x}{65/12}+\dfrac{y}{-65/5}=1$;

3) $\dfrac{12}{13}x-\dfrac{5}{13}y-5=0$.

3. Обчислити відстань від точки $M(1;\,1)$ до прямої $x=-1+2t,\quad y=2+t$.

Відповідь: $d=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

4. Знайти точку Q, симетричну до точки $P(-5;\,13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

Відповідь: $Q(11;-11)$.

Площина та пряма у просторі.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить: 1) через точки $M_1(1;-3;2)$, $M_2(-2;1;4)$ паралельно осі Ox; 2) через точку $M(-1;-2;-3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(1;3;-1)$; *3)* через вісь Ox і точку $M_1(-1;\,1;-3)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини, яка проходить через дві точки паралельно до осі Ox, застосовуючи формулу

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$$ маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ -2-1 & 1+3 & 4-2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-1)\cdot 0-(y+3)\cdot(-2)+(z-2)\cdot(-4)=2y-4z+14=0.$$

Отже, шукане рівняння площини запишеться у такому вигляді $y-2z+7=0$.

2) Знайдемо рівняння площини, що проходить через точку $M(-1;-2;-3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(1;3;-1)$.

$$1(x-(-1))+3(y-(-2))-(z-(-3))=0,$$

$$x+1+3y+6-z-3=0 \Rightarrow x+3y-z+4=0.$$

3) Запишемо рівняння площини, що проходить через вісь Ox і точку $M_1(-1;\,1;-3)$.

Оскільки $A=D=0$, то рівняння площини має вигляд:

$$By+Cz=0.$$

Запишемо рівняння площини, що проходить через точку M_1:

$$B-3C=0,$$

$$B=3C \Rightarrow 3Cy+Cz=0 \Rightarrow 3y+z=0$$

3) $3y+z=0$.

Приклад 2. Скласти рівняння площини, що проходить:1) через точку $M_1(1;1;1)$ паралельно до векторів $\vec{a}_1\{0;1;2\}$ і $\vec{a}_2\{-1;0;1\}$.;

2) через точки $A(2;-2;1)$, $B(-1;-4;3)$, $C(7;6;-2)$.

Розв'язання. 1) Рівняння площини P, яка проходить через точку $M_1(1;1;1)$ паралельно до векторів $\vec{a}_1\{0;1;2\}$ і $\vec{a}_2\{-1;0;1\}$., матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(x-1)\cdot 1-(y-1)\cdot 2+(z-1)\cdot 1=x-2y+z=0.$$

Отже, рівняння площини має вигляд $x-2y+z=0$.

2) Запишемо рівняння площини, застосовуючи формулу

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Отже, маємо:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ -1-2 & -4+2 & 3-1 \\ 7-2 & 6+2 & -2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 5 & 8 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-2)\cdot(-10)-(y+2)\cdot(-1)+(z-1)\cdot(-14)=$$

$$=-10x+y-14z+36=0.$$

Таким чином, рівняння площини набуває вигляду $-10x+y-14z+36=0$.

Пряма у просторі. Пряма і площина у просторі

Приклад 3. Скласти рівняння прямої: параметричні і канонічні, якщо пряма задана загальними рівняннями:

$$\begin{cases} 2x-y+2z-4=0, \\ x+2y-z-1=0. \end{cases}$$

Розв'язання.

1) Знайдемо координати напрямного вектора прямої:

$$\vec{S}=\left\{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\}=\{-3;\,4;\,5\};$$

2) знайдемо координати точки, що належить прямій:

$$x=0\Rightarrow\begin{cases} -y+2z-4=0, \\ 2y-z-1=0; \end{cases}\ \begin{cases} y=2z-4, \\ 4z-8-z-1=0; \end{cases}\ \begin{cases} y=2, \\ z=3; \end{cases}$$

3) запишемо параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x=-3t, \\ y=2+4t, \\ z=3+5t; \end{cases}$$

4) запишемо канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

Приклад 4. Скласти рівняння прямої: параметричні і канонічні, що проходить через дві точки $M_1(1; -2; 1)$, $M_2(3; 1; -1)$.

Розв'язання.

а) $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 3t-2, \\ z = -2t+1; \end{cases}$ б) $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y+2}{1+2} = \dfrac{z-1}{-1-1}$; $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Приклад 5. Перевірити, чи лежать три точки на одній прямій:

1) $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(-2; 0; 1)$, $M_3(0; -3; -4)$; 2) $M_1(3; 0; 1)$, $M_2(0; 2; 4)$, $M_3\left(1; \dfrac{4}{3}; 3\right)$.

Відповідь: 1) Так. 2) Ні.

Приклад 6. Знайти сліди прямої

$\begin{cases} x - z - 5 = 0, \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ у площинах *Oxy* і *Oxz* та побудувати їх.

Розв'язання.

а) у площині *Oxy* $z = 0$, $\begin{cases} x = 5, \\ y = 4 \end{cases}$ $(5; 4; 0)$;

б) у площині *Oxz* $y = 0$, $\begin{cases} x = 7, \\ z = 2 \end{cases}$ $(7; 0; 2)$.

Приклад 7. Обчислити кут між прямими

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

1) Знайдемо координати напрямного вектора другої прямої:

$$\vec{S} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right\} = \{7; 14; 7\}, \text{ або } \vec{S} \parallel \vec{q}\{1; 2; 1\};$$

2) за формулою косинуса кута між прямими маємо:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 - 2\cdot 2 + 3\cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}\cdot\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = 0, \ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 8. Доведіть паралельність прямих $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ та $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$.

Розв'язання.

$$\vec{S} = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right\} = \{-3; 1; -4\}.$$

Застосуємо умову паралельності прямих $\dfrac{-3}{3} = \dfrac{1}{-1} = \dfrac{-4}{4} = -1$, отже, прямі паралельні.

Приклад 9 Написати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; 0; -3)$ паралельно:

а) вектору $\vec{S}\{2; -3; 5\}$;

б) прямій $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$;

в) осі Ox; г) осі Oz;

д) прямій $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z-3=0;\end{cases}$

е) прямій $\begin{cases}x=-2+t,\\ y=2t,\\ z=1-\frac{1}{2}t.\end{cases}$

Розв'язання.

а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; б) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$;

в) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; г) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$;

д) $\vec{S}=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right\}=\{-4;8;10\}$; $\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{8}=\frac{z+3}{10}$;

е) $\vec{S}\left\{1;\ 2;\ -\frac{1}{2}\right\}$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-\frac{1}{2}}$.

Приклад 10 Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2;\ 3;\ 1)$ на пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

Розв'язання.

1) Рівняння площини, що проходить через точку $A(2;\ 3;\ 1)$ перпендикулярно заданій прямій, має вигляд: $2x-y+3z-4=0$;

б) знайдемо координати точки B перетину площини $2x-y+3z--4=0$ і прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x-y+3z-4=0,\\ x=2t-1,\\ y=-t,\\ z=3t+2\end{cases}\Rightarrow t=0.$$

Координати точки $B(-1;\ 0;\ 2)$. Тепер запишемо рівняння перпендикулярно AB: $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{1}$.

Приклад 11 Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1;\ -2;\ 3)$ і пряму $\begin{cases}2x-3y+z-3=0;\\ x+3y+2z+1=0.\end{cases}$

Розв'язання.

Нехай точка $M(x;y;z)$ належить площині π, а точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ — прямій. $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM_1}$ і $\vec{S}$ компланарні, тобто рівняння площини π має вигляд:

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1\\ m & n & p\end{vmatrix}=0.$$

Знайдемо координати точки M_1:

$$\begin{cases} 2x-3y+z-3=0, \\ x+3y+2z+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ 2x+z-3=0, \\ x+2z+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ -2-4z+z-3=0, \\ x=-1-2z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0, \\ z=-\dfrac{5}{3}, \\ x=\dfrac{7}{3}. \end{cases} \qquad M_1\left(\frac{7}{3};\ 0;\ -\frac{5}{3}\right).$$

$\vec{S}=\left\{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right\}=\{-9;-3;9\};$ $\vec{S}\parallel\{3;1;-3\}$ — напрямний вектор прямої.

Точка A збігається з точкою M_0.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ \frac{7}{3}-1 & 2+0 & -3-\frac{5}{3} \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -\frac{14}{3} \\ 1 & -3 \end{vmatrix}-(y+2)\cdot\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{14}{3} \\ 3 & -3 \end{vmatrix}+(z-3)\cdot\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)\cdot\left(-6+4\frac{2}{3}\right)-(y+2)\cdot(-4+14)+(z-3)\cdot\left(\frac{4}{3}-6\right)=0;$$

$$-(x-1)\cdot\frac{4}{3}-10\cdot(y+2)-(z-3)\cdot\frac{14}{3}=0;$$

$$-4x+4-30y-60-14z+42=0;$$

$$4x+30y+14z+14=0;$$

$$2x+15y+7z+7=0.$$

Приклад 12. Задано пряму $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ і точку $M(0;\ 1;\ 2)$. Необхідно:

1) скласти рівняння площини, що проходить через задану пряму і точку M;
2) скласти рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої;
3) обчислити відстань від точки до прямої;
4) знайти проекцію точки M на пряму.

Розв'язання.

1) $\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 2-0 & 0-1 & -1-2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0;$

$3x-6(y-1)+4(z-2)=0;\ \ 3x-6y+4z-2=0$.

2) $2x+y-1=0;$

3) а) рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої, $2x+y-1=0;$
б) знайдемо точку перетину прямої і площини:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ x=2t+2, \\ y=t, \\ z=-1; \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2(2t+2)+t-1=0, \\ 4t+4+t-1=0, \\ 5t=-3,\ t=-\dfrac{3}{5}; \end{array} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{6}{5}+2, \\ y=-\dfrac{3}{5}, \\ z=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{4}{5}, \\ y=-\dfrac{3}{5}, \\ z=-1; \end{cases}$$

$M_1\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; -1\right)$ — точка на прямій, найближча до M, проекція точки M на пряму.

в) $d(M,l) = d(M,M_1) = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(1+\frac{3}{5}\right)^2 + (2+1)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{64}{25} + 9} = \sqrt{\frac{305}{25}} = \frac{\sqrt{305}}{5} = \sqrt{\frac{61}{5}}.$$

Домашнє завдання

1. Складти рівняння площини, що проходить через точку $A(1; -2; 3)$ і пряму $\begin{cases} 2x-3y+z-3=0; \\ x+3y+2z+1=0. \end{cases}$

Відповідь: $2x+15y+7z+7=0$.

2. Знайти точку *B*, симетричну точці *A*(1; 3; –4) відносно площини $3x+y-2z=0$.

Відповідь: $B(-5;1;0)$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(5;2;3)$ та пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{3}$.

Відповідь: $x-2y-1=0$.

4. Через точку $M_0(1;1;1)$ провести пряму, паралельну площинам $x+y+z+1=0$ і $x-y-z+2=0$.

Відповідь: $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

5. Знайти відстань від точки $A(1;-1;0)$ до прямої, що проходить через точки $B(0;1;2)$ і $C(-1;0;3)$.

Відповідь: $\sqrt{78}/3$.

6. Пряма задана загальними рівняннями. Скласти канонічні та параметричні рівняння цієї прямої, якщо:

$$\begin{cases} x+2y-3z-5=0, \\ 2x-y+z+2=0. \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z+1}{-5}$; $x=-t$, $y=1-7t$, $z=-1-5t$.

7. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(3;-1;0)$ і $M_2(1;0;-3)$.

Відповідь: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$.

8. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1;-2;3)$ і пряму $\begin{cases} 2x-3y+z-3=0, \\ x+3y+2z+1=0. \end{cases}$

Відповідь: $2x+15y+7z+7=0$.

9. Через точку $M_0(1;1;1)$ провести пряму, паралельну площинам $x+y+z+1=0$ і $x-y-z+2=0$.

Відповідь: $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

10. Знайти проекцію точки $P_0(-1; 3; 2)$ на площину $x-2y+5z+27=0$.

Відповідь: (–2; 5; –3).

11. Переконатися, що задані прямі $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ і $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$ лежать в одній площині. Скласти рівняння цієї площини.

Відповідь: $6x-20y-11z+1=0$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2.1-2.2

Функція. Характеристики функції. Границі числових послідовностей. Границя функції. Розкриття деяких невизначеностей. Перша та друга важливі границі

Приклад 1. Знайти перші шість членів послідовності

$\left\{x_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}\right\}$.

Розв'язання.

$x_1=(-1)^2\cdot\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3};\ x_2=(-1)^3\cdot\frac{2}{4}=-\frac{1}{2};\ x_3=(-1)^4\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5};$

$x_4=(-1)^5\cdot\frac{4}{6}=-\frac{2}{3};\ x_5=(-1)^6\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{7};\ x_6=(-1)^7\cdot\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$

Відповідь: $\left\{\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{7}; -\frac{3}{4}\right\}$.

Приклад 2. Написати формулу загального члена послідовності

$\left\{\frac{1}{2\cdot 3}; \frac{2}{3\cdot 4}; \frac{3}{4\cdot 5}; \ldots\right\}$.

Розв'язання.

$x_1=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+2)};\ x_2=\frac{2}{3\cdot 4}=\frac{2}{(2+1)\cdot(2+2)};$

$x_3=\frac{3}{4\cdot 5}=\frac{3}{(3+1)\cdot(3+2)};\ \ldots\ x_n=\frac{n}{(n+1)\cdot(n+2)}.$

Відповідь: $\frac{n}{(n+1)\cdot(n+2)}$.

Приклад 3. Знайти границі послідовності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-3n^3+n^2+n}{n^3+4n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n^2+3}{n^2+3n-5}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n^3+4n^2-2}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n+1)!-n!}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3^n}{3^{n+1}+5^n}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots}$.

Розв'язання.

а) Поділимо чисельник та знаменник на n в найбільшій степені та використуєм основні теореми про границі послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-3n^3+n^2+n}{n^3+4n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^3}-3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=-3.$$

Відповідь: -3.

б) Аналогічно, як в попередньому прикладі:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n+3}{n^2+3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}=\infty .$$

Відповідь: ∞.

в)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n^3+4n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^3}}=0 .$$

Відповідь: 0.

г)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!+n!(n+1)(n+2)}{n!(n+1)-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\left(1+n^2+3n+2\right)}{n!(n+1-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+3}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(n+3+\frac{3}{n}\right)=\infty.$$

Відповідь: ∞.

д)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3^n}{3^{n+1}+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+1}-3^n}{5^n}}{\frac{3^{n+1}+5^n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=\left|\begin{array}{c}\text{Якщо}\quad n\to\infty\\ \left(\frac{3}{5}\right)^n\to 0\\ 0<\frac{3}{5}<1\end{array}\right|=5.$$

Відповідь: 5.

е)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots}.$$

Використовуючи формулу суми n членів геометричної прогресії

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}\right)=\frac{3}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}\right)=\frac{4}{3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{8}.$$

Відповідь: $\frac{9}{8}$.

Домашнє завдання

Знайти границі послідовностей

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-n^3+5}{6n^3+3n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-5n^2+1}{3n^3-n+6}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-4n^4+3}{2n^3-n-1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-(n+2)!}{(n+2)!-n!}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-6^n}{6^{n+1}+3\cdot 4^n}$.

Відповіді: а) $-\frac{1}{6}$; б) 0; в) $-\infty$; г) -1; д) $-\frac{1}{6}$.

Границя функції

Приклад 1. Довести, що $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$.

Доведення.

Функція $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ визначена на $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. У точці x функція невизначена, але визначена в будь-якому δ - околі даної точки. Нехай $\varepsilon>0.$ Знайдемо $\delta=\delta(\varepsilon)$ так, щоб для всіх значень $x\neq 2$, таких що задовольняють нерівність $|x-2|<\delta$ виконувалась нерівність $\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon.$

Оскільки $\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=\left|\frac{x^2-4-4x+8}{x-2}\right|=\left|\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right|=|x-2|<\varepsilon$ для всіх $x\neq 2$, то для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх x, що задовольняють умову $0<|x-2|<\delta$, буде виконуватись нерівність $\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon$, звідки й випливає, що $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$

Приклад 2. Обчислити границю функції:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+x-3}{3x^3+4x^2-2}$; *Розв'язання.*

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+x-3}{3x^3+4x^2-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{3+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^3}}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

Приклад 3. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+1}{3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{6-x}-2}$.

Розв'язання.

а) $$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+1}{3x+2}=\frac{2\cdot(-1)^2+1}{3\cdot(-1)+2}=\frac{-1}{-1}=1.$$

Відповідь: -1.

б) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+5}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

в)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1+x-1}{x^2(x-1)-(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1+1)}{(x-1)\,(x-1)\,(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)}=\infty.$$

Відповідь: ∞.

г) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to5}\frac{(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$ *Відповідь:* $\frac{1}{4}$.

Приклад 4. За допомогою першої важливої границі, знайти:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{bx}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg\,4x}{tg\,6x}$;

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{bx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax\cdot a}{ax\cdot b}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$.

Відповідь: $\frac{a}{b}$.

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg\,4x}{tg\,6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x\cdot\cos 6x}{\cos 4x\cdot\sin 6x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x\cdot 4x\cos 6x}{4x\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\cdot 6x\cdot\cos 4x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{6x}{\sin 6x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{4\cos 6x}{6\cos 4x}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Приклад 5. Використовуючи другу важливу границю, знайти:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{bx}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$;

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{bx}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{a}}\right)^{-\frac{x}{a}}\right)^{-ab}=e^{-ab}=\frac{1}{e^{ab}}$.

Відповідь: $\frac{1}{e^{ab}}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{\frac{x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{2x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{4x-2}}=e$.

Відповідь: e.

Домашнє завдання

1. Знайти границі функцій.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x^3-4}{x^5+6x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-6x^2-2x+1}{3x-5x^3-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4+2x-3}{x^3-x^2+2}$; г) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3+2x^2-x-14}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7}}{2x^2-x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+7}{\sqrt{81x^4-3x^3}+2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Відповіді:1. а) 0; б) $-\frac{5}{4}$; в) ∞; г) $\frac{12}{19}$; д) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$; е) $\frac{1}{9}$; ж) 0.

2. Знайти границі функцій.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2-3x}{\sin 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{x}\right)^{2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-5x}{2-5x}\right)^{\frac{2x-1}{3}}$; е) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{4x}$;

Відповідь: а) $\frac{9}{8}$; б*)* -4; в*)* $-\frac{3}{5}$; г*)* $\frac{1}{e^{14}}$; д*)* $\frac{1}{\sqrt[15]{e^4}}$;

е) $\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\to\infty \\ \infty, & \text{якщо } x\to-\infty \end{cases}$;

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2.3-2.4

Неперервність функції в точці. Точки розриву. Похідна функції, правила диференціювання. Знаходження похідних основних елементарних функцій

Приклад 1. Обчислити односторонні границі

а) $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{5}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{5}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{|x-3|}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to 3-0}\frac{|x-3|}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1+0}5^{\frac{1}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to 1-0}5^{\frac{1}{x-1}}$;

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{5}{x-2}=\infty$; $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{5}{x-2}=-\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{|x-3|}{x-3}=1$; $\lim\limits_{x\to 3-0}\frac{|x-3|}{x-3}=-1$.

в) $\lim\limits_{x\to 1+0}5^{\frac{1}{x-1}}=\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0}5^{\frac{1}{x-1}}=0$.

Приклад 2. Дослідити функцію на неперервність:

а) $f(x)=3^{\frac{1}{x+2}}$; б) $f(x)=\frac{2}{1-3^{3+x}}$;

в) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ \sin x, & 0<x\le\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}-x, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le -1, \\ 2x^2-1, & -1<x\le 1, \\ \frac{1}{x}, & x>1. \end{cases}$

Розв'язання.

а) $f(x)=3^{\frac{1}{x+2}}$.

Область визначення функції $D(y)=(-\infty;\,-2)\cup(-2;\,+\infty)$. Отже, в точці $x=-2$ функція має розрив. Доведемо це: $f(-2)=\infty$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-2-0}3^{\frac{1}{x+2}}=0\\&\lim_{x\to-2+0}3^{\frac{1}{x+2}}=\infty\end{aligned}\right\},$$ тоді $x=-2$ – точка розриву II роду.

б) $f(x)=\dfrac{2}{1-3^{3+x}}$.

Область визначення функції

$D(y)=1-3^{3+x}\neq 0$

$3^{3+x}\neq 1$

$3+x\neq 0$

$x\neq -3$

$D(y)=(-\infty;\,-3)\cup(-3;\,+\infty)$. Отже, в точці $x=-3$ функція має розрив. Доведемо це: $f(-3)=2$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-3-0}\dfrac{2}{1-3^{3+x}}=\\[2ex]\lim\limits_{x\to-3+0}\dfrac{2}{1-3^{3+x}}=\end{cases}$$

в) $$f(x)=\begin{cases}x, & x\leq 0,\\ \sin x, & 0<x\leq\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\pi}{2}-x, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Область визначення функції $D(y)=R$. Перевіримо на неперервність в точках $x_1=0$ та $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

$x_1=0$, $f(0)=0$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to0-0}f(x)=\lim_{x\to0-0}x=0\\&\lim_{x\to0+0}f(x)=\lim_{x\to0+0}\sin x=0\end{aligned}\right\},$$ тоді функція неперервна в точці $x=-1$.

$x_2=\dfrac{\pi}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin x=1\\&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0\end{aligned}\right\},$$ тоді $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ – точка розриву роду 1-го.

Графік даної функції зображено на рис.1.

г) $$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq -1,\\ 2x^2-1, & -1<x\leq 1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$$

Область визначення функції $D(y)=(-\infty;\,0)\cup(0;\,\infty)$. Крім $x=0$, функція має ще одну точку розриву $x=-1$.

$x_1=-1$, $f(-1)=-1+1=0$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}(x+1)=0\\&\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\left(2x^2-1\right)=1\end{aligned}\right\},$$ отже $x=-1$ – точка розриву I роду

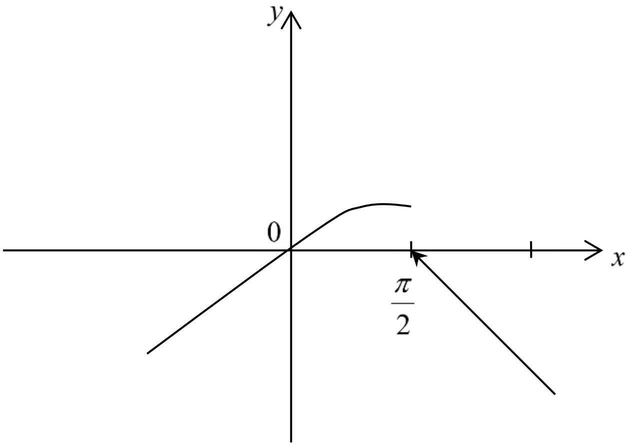


Рис.1.

$x_2 = 1$, $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} \left(2x^2 - 1\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{x} = 1\end{array}\right\},\ \begin{array}{l}\text{отже в точці } x = 1 \\ \text{функція неперервна}\end{array}$$

Графік даної функції зображено на рис.2.

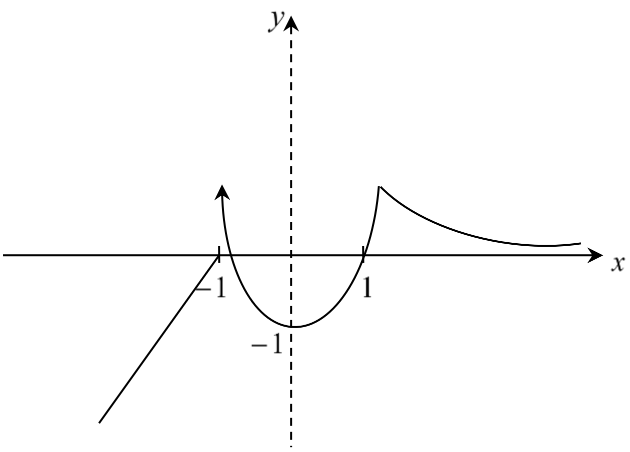


Рис.2.

Домашнє завдання

Дослідити функцію на неперервність.

а) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{1-x}$; б) $f(x) = \dfrac{2}{3^{\frac{1}{2x+1}}}$; в) $f(x) = \dfrac{1}{5^{2x-3} - 3}$;

г) $f(x) = \begin{cases} 2\,tg\,\dfrac{x}{2}, & \text{якщо } |x| < \dfrac{\pi}{2}; \\ 2, & \text{якщо } |x| > -\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} e^{x+3}, & \text{якщо } x < -3; \\ 10 - x^2, & \text{якщо } |x| \le 3; \\ 2^{\frac{1}{x-2}}, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$

Похідна функції

Приклад 1. Знайти приріст функції $\Delta f(x_0,\, \Delta x)$, якщо а) $f(x)=1-3x+x^3$, $\quad x_0=-1$, $\quad \Delta x=0{,}1$;

б) $f(x)=\cos 2x$, $\quad x_0=\pi$, $\quad \Delta x=\dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язання.

а) $\Delta f(x_0,\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=1-3(x_0+\Delta x)+(x_0+\Delta x)^3-1+3x_0-x_0^3=$

$=1-3x_0-3\Delta x+x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-1+3x_0-x_0^3=$

$=-3\Delta x+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=-0{,}3+0{,}3-0{,}03+0{,}001=-0{,}0299$;

б)

$\Delta f(x_0,\Delta x)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\cos(2x_0+2\Delta x)-\cos 2x_0=$

$=-2\sin\dfrac{2x_0+2\Delta x+2x_0}{2}\sin\dfrac{2x_0+2\Delta x-2x_0}{2}=-2\sin(2x_0+\Delta x)\sin\Delta x=$

$=-2\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\dfrac{\pi}{6}=-2\cdot\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

Приклад 2. Користуючись означенням похідної, обчислити $f'(x)$, якщо $f(x)=x+3x^2$ у точці $x=-1$.

Розв'язання.

1)

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x+3(x+\Delta x)^2-x-3x^2=\Delta x+3x^2+6x\Delta x+$

$+3(\Delta x)^2-3x^2=\Delta x(1+6x+3\Delta x)$;

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x(1+6x+3\Delta x)}{\Delta x}=1+6x+3\Delta x$;

3) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+6x+3\Delta x)=1+6x$, $\quad y'(-1)=-5$.

Приклад 3. Знайти похідні функції, використовуючи таблицю похідних та основні правила диференціювання.

а) $y=9x^3+4x^2-6x+2$; $\qquad$ б) $y=5\sqrt{x^3}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{4}{3x^3}$;

в) $y=\dfrac{3x^2\cdot\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{8\sqrt[6]{x^5}}$; $\qquad$ г) $y=(4-x^3)\cdot\cos x$;

д) $y=\dfrac{2-3x^2}{x^2+1}$.

Розв'язання.

а) $y'=27x^2+8x-6$.

б) $y'=\left(5x^{\frac{3}{2}}+6x^{-\frac{2}{3}}-\dfrac{4}{3}x^{-3}\right)'=\dfrac{15}{2}x^{\frac{1}{2}}-6\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\dfrac{4}{3}\cdot 3x^{-4}=$

$=\dfrac{15}{2}\cdot\sqrt{x}-6\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\dfrac{4}{3}\cdot 3x^{-4}=\dfrac{15}{2}\cdot\sqrt{x}-\dfrac{4}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{4}{x^4}$.

в) $y'=\left(\dfrac{3x^2\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}}{8x^{\frac{5}{6}}}\right)'=\left(\dfrac{3}{8}x^{\frac{16}{3}}\right)'=\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{16}{3}x^{\frac{13}{3}}=2x^4\cdot\sqrt[3]{x}$.

г) $y'=(4-x^3)'\cdot\cos x+(4-x^3)\cdot(\cos x)'=-3x^2\cdot\cos x-(4-x^3)\sin x$.

д) $y'=\dfrac{(2-x^2)'\cdot(x^2+1)-(x^2+1)'\cdot(2-x^2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x\cdot(x^2+1)-2x(2-x^2)}{(x^2+1)^2}=$

$=\dfrac{-2x^3-2x-4x+2x^3}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{6x}{(x^2+1)^2}$.

4. Знайти похідні складених функцій:

а) $y=\dfrac{5-3x}{\sqrt{2x+1}}$; б) $y=\sqrt{x-x^2}\cdot e^{4x}$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-2x^2}$;

г) $y=\ln\sqrt{\dfrac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}}$; д) $y=arctg\sqrt{\dfrac{4x-1}{4x+1}}$.

Розв'язання.

а) $$y'=\frac{-3\sqrt{2x+1}-\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}\cdot(5-3x)}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}=\frac{\dfrac{-3(2x+1)-(5-3x)}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=$$

$$=\frac{-6x-3-5+3x}{\sqrt{(2x+1)^3}}=-\frac{3x+8}{\sqrt{(2x+1)^3}}.$$

б) $$y'=\frac{(1-2x)e^{4x}}{2\sqrt{x-x^2}}+4\sqrt{x-x^2}\cdot e^{4x}=\frac{\left(1-2x+8x-8x^2\right)e^{4x}}{2\sqrt{x-x^2}}=$$

$$=\frac{1+6x-8x^2}{2\sqrt{x-x^2}}\cdot e^{4x}.$$

в) $$y'=\frac{-4x}{\sqrt{1-1+2x^2}\cdot 2\cdot\sqrt{1-2x^2}}=-\frac{4x}{x\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-2x^2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-2x^2}}.$$

г) $$y'=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}}}\cdot\frac{-2\sin 2x(\cos 2x+1)+2\sin 2x(\cos 2x-1)}{(\cos 2x+1)^2}=$$

$$=\frac{(\cos 2x+1)}{2(\cos 2x-1)}\cdot\frac{-4\sin 2x}{(\cos 2x+1)^2}=-\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x-1}=\frac{2\sin 2x}{\sin^2 2x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$

д) $$y'=\frac{1}{1+\dfrac{4x-1}{4x+1}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{4x-1}{4x+1}}}\cdot\frac{4(4x+1)-4(4x-1)}{(4x+1)^2}=\frac{(4x+1)}{8x}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{4x-1}}\cdot$$

$$\cdot\frac{8}{(4x+1)^2}=\frac{1}{2x\cdot\sqrt{(4x-1)(4x+1)}}=\frac{1}{2x\sqrt{16x^2-1}}.$$

Домашнє завдання

1. Знайти приріст Δy і відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функції: $y=\sqrt{x}$ при $x=0;\ \Delta x=0,0001$.

2. Показати, що наступні функції не мають кінцевих похідних в даних точках:

1) $y=\sqrt[5]{x^3};\quad x=0$

2) $y=3|x|+1;\quad x=0$.

3. Знайти похідну функції:

а) $y=\sqrt{1-2x}\cdot e^{4x}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}$. в) $y=arctg\sqrt{x^2-1}$;

г) $y=\ln\cos\sqrt{2x}$; д) $\sqrt{x+y}=x^2+y$; е) $y=x^{\cos x}$;

Відповіді: а) $\dfrac{(3-8x)e^{4x}}{\sqrt{1-2x}}$; б) $\dfrac{2}{(2x+1)\sqrt{4x^2-1}}$; в) $\dfrac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$;

г) $-\dfrac{tg\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$; д) $y'=\dfrac{\left(4\sqrt{xy}-1\right)\cdot x}{2\sqrt{xy}+1}$; е) $y'=x^{\cos -1}(\cos x-x\sin x\cdot\ln x)$;

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2.5-2.6

Похідна складеної та оберненої функцій. Похідна функцій, що задані неявно та параметрично. Логарифмічне диференціювання. Диференціал функції. Похідні і диференціали вищих порядків

1. Знайти похідні функцій:

1) $y=\left(x^2-3x+1\right)^5$;

2) $y=x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{x^2-5}$; 3) $\varphi(z)=\left(z^2+\dfrac{y}{z}\right)^2$, $\varphi'(2)$;

4) $y=\dfrac{1}{3}x^3\sin 3x$; 5) $y=\operatorname{ctg}^3 4x$;

6) $y=3\operatorname{tg}\dfrac{x^2-1}{x}$; 7) $y=\sqrt{\cos\sqrt[3]{x+1}}$;

8) $y=2\sin x+2x\cos x+x^2\sin x$; 9) $y=\ln\left(3x^2-x^3\right)$;

10) $y=\lg\sin 3x$; 11) $y=\ln\dfrac{x^3+1}{x^3}$;

12) $y=\left(\sqrt{3x}-1\right)e^{\sqrt{3x}}$; 13) $y=1-e^{\cos^2 3x}\cdot\sin^2 3x$;

14) $y=x\cdot\arcsin 3^x$; 15) $y=5^{x^6}$.

Розв'язання:

1) $\left(\left(x^2-3x+1\right)^5\right)'=5\left(x^2-3x+1\right)\left(2x-3\right)$;

2) $\left(x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{x^2-5}\right)'=\dfrac{2\sqrt{x^2-5}}{3\sqrt[3]{x}}+\dfrac{x^{\frac{2}{3}}2x}{2\sqrt{x^2-5}}=\dfrac{2x^2-10+3x^2}{3\sqrt[3]{x}\sqrt{x^2-5}}=\dfrac{5(x^2-2)}{\sqrt{x^2-5}}$;

3) $\varphi(z)=\left(z^2+\dfrac{y}{z}\right)^2$, $\varphi'(2)$, $\varphi'(z)=2\left(z^2+\dfrac{y}{z}\right)\left(2z-\dfrac{y}{z^2}\right)$; $\varphi'(2)=36$;

4) $\left(\dfrac{1}{3}x^3\sin 3x\right)'=\dfrac{3}{3}x^2\sin 3x+\dfrac{3}{3}x^3\cos 3x=x^2\sin 3x+x^3\cos 3x$;

5) $\left(\operatorname{ctg}^3 4x\right)'=-3\operatorname{ctg}^2 4x\dfrac{4}{\sin^2 4x}=-\dfrac{12\operatorname{ctg}^2 4x}{\sin^2 4x}$;

6) $\left(3\operatorname{tg}\dfrac{x^2-1}{x}\right)'=\dfrac{3}{\cos^2\dfrac{x^2-1}{x}}\cdot\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)'=\dfrac{3}{\cos^2\dfrac{x^2-1}{x}}\cdot\dfrac{2x^2-x^2+1}{x^2}=$

$=\dfrac{3\left(x^2+1\right)}{x^2\cos^2\dfrac{x^2-1}{x}}$;

7) $\left(\sqrt{\cos\sqrt[3]{x+1}}\right)'=\dfrac{-\sin\sqrt[3]{x+1}}{2\sqrt{\cos\sqrt[3]{x+1}}}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}=$

$=-\dfrac{\sin\sqrt[3]{x+1}}{6\sqrt{\cos\sqrt[3]{x+1}}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}$;

8) $\left(2\sin x+2x\cos x+x^2\sin x\right)'=2\cos x+2\cos x-2x\sin x+$

$+2x\sin x+x^2\cos x=4\cos x+x^2\cos x$;

9) $\left[\ln\left(3x^2-x^3\right)\right]'=\dfrac{6x-3x^2}{3x^2-x^3}=\dfrac{6-3x}{3x-x^2}$;

10) $[\lg\sin 3x]'=\dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x\ln 10}=\dfrac{3\mathrm{ctg}3x}{\ln 10}$;

11) $\left(\ln\dfrac{x^3+1}{x^3}\right)'=\dfrac{x^3\left(3x^5-3x^5-3x^2\right)}{(x^3+1)x^6}=-\dfrac{3}{x(x^3+1)}$;

12) $\left[\left(\sqrt{3x}-1\right)e^{\sqrt{3x}}\right]'=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{3x}}+\left(\sqrt{3x}-1\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{3x}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{3x}}\left(\sqrt{3x}\right)=\dfrac{3}{2}e^{\sqrt{3x}}$;

13) $\left[1-e^{\cos^2 3x}\cdot\sin^2 3x\right]'=3\sin 6x\cdot e^{\cos^2 3x}\cdot\sin^2 3x-3e^{\cos^2 3x}\cdot\sin 6x=$

$=-3\sin 6x\cdot e^{\cos^2 3x}\cdot\cos^2 3x$;

14) $\left(x\cdot\arcsin 3^x\right)'=\arcsin 3^x+\dfrac{x}{\sqrt{1-3^{2x}}}\cdot 3^x\ln 3$;

15) $\left(5^{x^6}\right)'=5^{x^6}\cdot\ln 5\cdot 6x^5$.

2. Використовуючи логарифмічне диференціювання, знайти похідні функцій:

1) $y=x^{5x}$; 2) $y=\dfrac{(x-1)^2(3x+1)}{(x+5)^2}$.

Розв'язання.

1) $y=x^{5x},\ \ \ln y=5x\ln x;\ \ \dfrac{1}{y}\cdot y'=5\ln x+5;\ \ y'=5x^{5x}\left(\ln x+1\right)$;

2) $y=\dfrac{(x-1)^2(3x+1)}{(x+5)^2};\ \ \ln y=2\ln(x-1)+\ln(3x+1)-2(x+5);$

$\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{3x+1}-\dfrac{2}{x+5};$

$y'=\dfrac{(x-1)^2(3x+1)}{(x+5)^2}\cdot\left(\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{3x+1}-\dfrac{2}{x+5}\right).$

3. Функція задана неявно. Знайти похідну:

1) $x^3+y^3=3xy$; 2) $y=2x+\arccos 3y$; 3) $\dfrac{x+1}{y^2}=\mathrm{tg}xy$.

Розв'язання:

1) $x^3+y^3=3xy$; $3x^2+3y^2y'=3y+3xy';$

$3x^2-3y=(3x-3y^2)y';\ \ y'=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}.$

2) $y=2x+\arccos 3y;\ \ y'=2-\dfrac{3y'}{\sqrt{1-9y^2}};$

$y'\left(1+\dfrac{3}{\sqrt{1-9y^2}}\right)=2;\ \ y'=\dfrac{2\sqrt{1-9y^2}}{\sqrt{1-9y^2}+3}$;

3) $\dfrac{x+1}{y^2}=\mathrm{tg}xy;\ \ y^2\dfrac{-(x+1)2y\cdot y'}{y^4}=\dfrac{y+xy'}{\cos^2 xy};$

$$\frac{1}{y^2}-\frac{y}{\cos^2 xy}=y'\left(\frac{2(x+1)}{y^3}+\frac{x}{\cos^2 xy}\right);$$

$$y'=\frac{\left(\cos^2 xy-y^3\right)y}{2x\cos^2 xy+2\cos^2 xy+y^3x}.$$

4.

4. Функції, задані параметрично. Знайти похідні:

1) $\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=4\sin t;\end{cases}$; 2) $\begin{cases}x=t^2-2t,\\ y=t^2+2t;\end{cases}$; 3) $\begin{cases}x=3\sin 2t-\sin 3t,\\ y=3\cos 2t+\cos 3t.\end{cases}$.

Розв'язання:

1) $\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=4\sin t;\end{cases}$ $y'_x=\frac{4\cos t}{-3\sin t}=-\frac{3}{4}\mathrm{tg}t$;

2) $\begin{cases}x=t^2-2t,\\ y=t^2+2t;\end{cases}$ $y'_x=\frac{2t+2}{2t-2}=\frac{t+1}{t-1}$;

3) $\begin{cases}x=3\sin 2t-\sin 3t,\\ y=3\cos 2t+\cos 3t;\end{cases}$ $y'_x=\frac{-6\sin 2t-3\sin 3t}{6\cos 2t-3\cos 3t}$.

Домашнє завдання

Знайти похідні.

1. а) $\sqrt[3]{x^3+3x^2-1}$; б) $\left(x^5-1\right)^3$; в) $f\left(x\right)=(x^3-3x+1)^4$; знайти $f\left(0\right)$ і $f\left(-1\right)$; г) $\frac{2x+1}{\sqrt{3-2x}}$; д) $\sqrt[5]{\frac{x^2(x^3+1)}{(x^2-1)^2}}$.

Відповідь: а) $\frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{x^3+3x^2-1}}$; б) $15x^4(x^5-1)$; в) $f\left(0\right)=-12$; $f\left(-1\right)=0$; г) $\frac{2x-7}{(2x-3)\sqrt{3-2x}}$.

2. а) $\sin^4\frac{x}{4}$; б) $x^3\mathrm{tg}x-10x$; в) $\mathrm{tg}3x-\frac{3}{4}\mathrm{tg}^2 4x$;
г) $\sin^2 x\cdot\sin 2x$.

Відповідь: а) $2\sin^2\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$; б) $3x^2\mathrm{tg}x+\frac{x^3}{\cos^2 x}-10$;
в) $\frac{3}{\cos^2 3x}-\frac{6\mathrm{tg}4x}{\cos^2 4x}$; г) $2\sin x\sin 3x$.

3. а) $\log_3\ln 5x$; б) $2\ln\frac{x+1}{x-1}+4\mathrm{arctg}x$; в) $\ln\arccos\sqrt[3]{x^3+5}$.

Відповідь: б) $-\frac{8}{x^4-1}$.

4. Використовуючи логарифмування, знайти функції: а) x^{3x}; б) $x^{3\cos x}$.

Відповідь: а) $x^{3x-1}\ln 3x^2$; б) $\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\cdot\ln x\right)x^{3\cos x}$.

5. Знайти похідні функцій y, заданих неявно:

а) $x^3-x^2y+y^3=25$; б) $x^2-y=\mathrm{arcctg}y$; в) $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Відповідь: а) $y'=\frac{3x^2-2xy}{x^2-3y^2}$; б) $y'=2x(1+\frac{1}{y^2})$; в) $y'=\frac{1-3^y}{3^x-1}\cdot 3^{x-y}$.

6.

6. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

а) $\begin{cases} x = e^{2t}\cdot\sin 3t, \\ y = e^{2t}\cdot\cos 3t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2t\sin t. \end{cases}$

Відповідь: а) $\dfrac{2\cos 3t - 3\sin 3t}{2\sin 3t + 3\cos 3t}$; б) $-\dfrac{2}{3}(t\mathrm{ctg}t + 1)$.

Диференціал функції

Приклад 1. Знайти диференціал функції

а) $y = \ln tg^2 5x$; б) $y = 4^{\arcsin 2x}$;

в) $x^2 y + 5xy = x + 2y$; г) $\sqrt{x + 2xy} = y$.

Розв'язання.

а) $dy = y'\cdot dx$.

$$y' = \frac{1}{tg^2 5x}\cdot 2tg5x\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5 = \frac{10}{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}\cdot\cos^2 5x} = \frac{10}{\sin 5x\cdot\cos 5x} =$$

$$= \frac{20}{\sin 10x};\ dy = \frac{20}{\sin 10x}.$$

б) $y' = 4^{\arcsin 2x}\cdot\ln 4\cdot\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = \dfrac{4^{\arcsin 2x}\ln 16}{\sqrt{1-4x^2}};\ dy = \dfrac{4^{\arcsin 2x}\ln 16}{\sqrt{1-4x^2}}.$

в) $x^2 y + 5xy = x + 2y;\ 2xy + x^2 y' + 5y + 5xy' = 1 + 2y';$

$$y'\left(x^2 + 5xy + 2\right) = 1 - 2xy - 5y;\ y' = \frac{1-2xy-5y}{x^2+5x+2};\ dy = \frac{1-2xy-5y}{x^2+5x+2}dx.$$

г) $\dfrac{1 + 2y + 2xy'}{2\sqrt{x+2xy}} = 1;\ y' = \dfrac{2\sqrt{x+2xy} - 2y - 1}{2x};\ dy = \dfrac{2\sqrt{x+2xy} - 2y - 1}{2x}dx.$

Приклад 2. Обчислити наближено.

а) $\sqrt{27}$; б) $tg46^0$.

Розв'язання.

а) $27 = 25 + 2 = 25\cdot\left(1 + \dfrac{2}{25}\right).$

Тому $\sqrt{27} = \sqrt{25\left(1+\dfrac{2}{25}\right)} = 5\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{25}}.$

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Тоді, якщо $x = 1,\quad \Delta x = \dfrac{2}{25}$

$$\sqrt{1+\frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\cdot\frac{2}{25} = 1 + 0{,}04 = 1{,}04.$$

$$\sqrt{27} \approx 5\cdot 1{,}04 = 5{,}2.$$

б) $tg46^0,\ 46^0 = 45^0 + 1^0$

$$tg(x+\Delta x) \approx tgx + (tg\,x)'\cdot\Delta x.$$

Якщо $x = 45^0,\ \Delta x = 1.$

$$tg\,46^0 = tg\left(45^0 + 1^0\right) \approx tg\,45^0 + \frac{1}{\cos^2 45^0}\cdot 0{,}017 = 1 + 0{,}0349 = 1{,}0349.$$

Приклад 3. Знайти похідні другого порядку:

а) $y = e^{-4x^2}$; б) $y = arctg\sqrt{x}$; в) $\begin{cases} x = 2t\sin t, \\ y = 2t\cos t. \end{cases}$

Розв'язання.

а) $y' = -8xe^{-4x^2}$; $y'' = -8e^{-4x^2} + 64x^2e^{-4x} = 8e^{-4x^2}\left(8x^2 - 1\right)$.

б) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$; $y'' = -\dfrac{1}{4x(1+x)^2}\cdot\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\right) =$

$= -\dfrac{1}{4x(1+x)^2}\cdot\dfrac{1+3x}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1+3x}{8\sqrt{x^3}\cdot(1+x)^2}$.

в) $x'_t = 2\sin t + 2t\cos t$; $y'_t = 2\cos t - 2t\sin t$; $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\cos t - t\sin t}{\sin t + t\cos t}$;

$$\left(y'_x\right)'_t = \frac{(-\sin t - \sin t - t\cos t)(\sin t + t\cos t)}{(\sin t + t\cos t)^2} -$$

$$-\frac{(\cos t + \cos t + t\sin t)(\cos t - t\sin t)}{(\sin t + t\cos t)^2} =$$

$$= \frac{-2 - 2t\sin t\cos t - t^2\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)}{(\sin t + t\cos t)^2} = -\frac{t^2\cos 2t + t\sin 2t + 2}{(\sin t + t\cos t)^2};$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)_t}{x'_t} = -\frac{t^2\cos 2t + t\sin 2t + 2}{2(\sin t + t\cos t)^3}.$$

Приклад 4. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = \ln x$.

Розв'язання.

$y' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$; $y'' = -1\cdot x^{-2}$; $y''' = -1\cdot(-2)\cdot x^{-3}$; $y^{(4)} - 1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot x^{-4}$

$y^{(n)} = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-1)^{n-1}\cdot(n-1)x^{-n} = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot x^{-n}$.

Домашнє завдання

1. Знайти диференціал функції:

а) $y = \cos\sqrt{5x}$; б) $y = x\arccos\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$;

в) $y = arctg\, e^{2x}$; г) $e^{\frac{y}{x}} = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

Відповіді: а) $-\dfrac{5\sin\sqrt{5x}}{2\sqrt{5x}}dx$; б) $\arccos\dfrac{x}{2}dx$; в) $\dfrac{2e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$; г) $\dfrac{y\,dx}{x}$.

2. Обчислити: а) $arctg1{,}05$; б) $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Відповіді: а) $0{,}811$; б) $1{,}9938$.

3. Знайти похідні другого порядку:

а) $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$; б) $y = -\dfrac{22}{x+5}$.

Відповіді: а) $y'' = \ln x$; б) $y'' = -\dfrac{44}{(x+5)^3}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2.7

Монотонність та локальний екстремум функції. Найбільше і найменше значення функції. Опуклість та вгнутість кривих. Точки перегину

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \sqrt{21 + 4x - x^2}$ у інтервалі $[-1;\ 7]$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції :

$D(x)$: $\quad 21 + 4x - x^2 \ge 0$

$(x-7)(x+3)\le 0$

$D(x)=[-3;\ 7].$

$$y'=\frac{-2x+4}{2\sqrt{21+4x-x^2}}=\frac{2-x}{\sqrt{21+4x-x^2}};$$

критична точка $x=2$.

Функція набуває своїх найбільшого і найменшого значень, або в критичної точці, або на кінцях інтервалу.

$y(2)=\sqrt{21+8-4}=\sqrt{25}=5;$

$y(-1)=\sqrt{21-4-1}=\sqrt{16}=4;$

$y(7)=\sqrt{21+28-49}=0.$

Отже, $\max\limits_{[-1;\ 7]} y(x)=y(2)=5;\ \min\limits_{[-1;\ 7]} y(x)=y(7)=0.$

Приклад 2. Знайти інтервали монотонності функції

$y=x-\ln(x+2).$

Розв'язання.

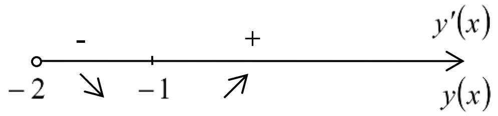
Область визначення функції $D(y)=(-2;\ +\infty).$

Знайдемо критичні точки 1 роду.

$$y'=1-\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{x+2};$$

$y'=0 \Rightarrow x=-1$ - критична точка.

Визначимо знак першої похідної функції при переході через критичну точку 1 роду.



Тобто, $y\uparrow,\ x\in(-1;\ +\infty)$; $y\downarrow,\ x\in(-2;\ -1)$.

Приклад 3. Знайти екстремум функції $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Розв'язання.

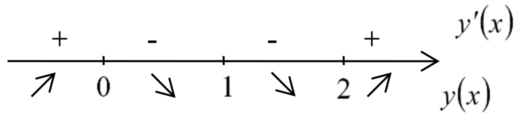
Область визначення функції $D(y)=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty).$

Знайдемо критичні точки 1-го роду:

$$y'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2};$$

$y'=0,\ x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0$ та $x_2=2$ - критичні точки 1-го роду.

Визначимо знак першої похідної функції при переході через критичні точки 1 роду.



Отже, $x_{\max}=0,\ \Rightarrow y_{\max}=0;\ x_{\min}=2,\ \Rightarrow y_{\min}=4.$

Приклад 4. Знайти інтервали опуклості і вгнутості функції та точки перегину функції $y=(x+1)e^{x+1}$.

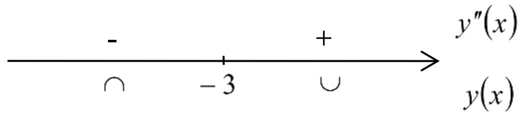
Розв'язання.

Область визначення функції $D(y)=R.$ Знайдемо критичні точки другого роду.

$y'=e^{x+1}+(x+1)e^{x+1}=(x+2)e^{x+1};$

$y''=e^{x+1}+(x+2)e^{x+1}=(x+3)e^{x+1}.$

$y''=0,\ \Rightarrow\ (x+3)=0,\quad x=-3$ - критична точка другого роду.
Визначимо знак другої похідної функції при переході через критичні точки другого роду.



Отже, $y\ \cup,\ x\in(-3;\ +\infty)$; $y\ \cap,\ x\in(-\infty;\ -3)$.
Точка $x=-3$ - абсциса точки перегину.

$$y(-3)=-2e^{-2}=-\frac{2}{e^2}.$$

Тобто точка $-3;\ -\frac{2}{e^2}$ - точка перегину.

Приклад 5. Знайти асимптоти $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$.

Розв'язання.

1) З області визначення функції випадають точки $x=\pm 2.$ Знайдемо границі функції при $x\to 2;\ x\to -2$ ліворуч на праворуч.

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3}{4-x^2}=-\infty;\quad \lim_{x\to 2-0}\frac{x^3}{4-x^2}=\infty.$$

Тому $x=2$ - вертикальна асимптота .

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{x^3}{4-x^2}=-\infty;\quad \lim_{x\to -2-0}\frac{x^3}{4-x^2}=\infty.$$

Тому $-x=2$ - вертикальна асимптота.

2) Похила асимптота $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(4-x^2)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{4}{x^2}-1}=-1;\qquad k=-1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x-x^3}{4-x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4-x^2}=0.$$

Тому $y=-x$ - похила асимптота.

3) Горизонтальна $y=b$.

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{4-x^2}=\infty.$$

Горизонтальних асимптот немає.

Приклад 6. Дослідити функцію та побудувати її графік

$$y=x+\frac{4}{x}.$$

Розв'язання.

1) Область визначення функції $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

2) Перевіримо функцію на парність

$$y(-x)=-x-\frac{4}{x}=-\left(x+\frac{4}{x}\right)=-y(x).$$

Функція непарна, графік симетричне відносно початку координат. Функція не періодична.

3) Знайдемо асимптоти функції:

- вертикальна асимптота $x=0$;
- похила асимптота.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^2}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0.$$

Тоді похила асимптота має вигляд
$y=x$.

4) Дослідимо функцію за допомогою першої похідної

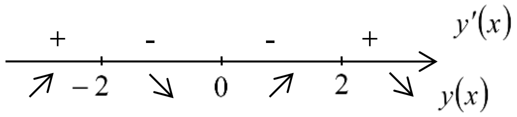
$$y'=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2};$$

Знайдемо критичні точки 1-го роду

$$y'=0;\ \frac{x^2-4}{x^2}=0;$$

$$x_1=-2;\ x_2=2.$$

Визначимо знак 1-ої похідної при переході через критичні точки 1-го роду



Отже, $y\uparrow$, якщо $x\in(-\infty;\,-2)$ та $(0;\,2)$;
$y\downarrow$, якщо $x\in(-2;\,0)$ та $(2;\,+2)$.

$$x_{\max}=-2;\ x_{\min}=2$$

$$y_{\max}=-4;\ y_{\min}=4$$

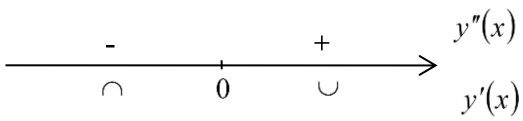
Функція має екстремуми $y_{\max}=-4;\quad y_{\min}=4.$

5) Дослідимо функцію за допомогою другої похідної

$$y''=\frac{2x\cdot x^2-2x\left(x^2-4\right)}{x^4}=\frac{8}{x^3}.$$

Критичних точок 2-го роду не існує.

Перевіримо знак другої похідної в області визначення



Отже, $y\cap$, якщо $x\in(-\infty;\,0)$;
$y\cup$, якщо $x\in(0;\,+\infty)$.

Точок перегину немає.

6) Графік функції зображено на рис.3.

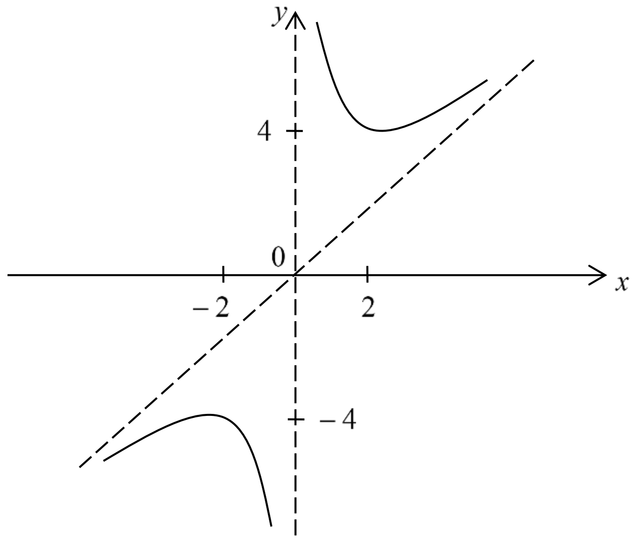


Рис.3.

Домашнє завдання

1. Знайти найбільше та найменше значення функції на інтервалі:

а) $y = x + \dfrac{4}{x^2},\ x \in [1;\ 3]$; б) $y = \sin 2x - x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Відповідь: а) 5 і 3; б) $\dfrac{\pi}{2}$ і $-\dfrac{\pi}{2}$.

2. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції:

а) $y = x^3 - 3x + 5$; б) $y = x^2 \cdot e^{-2x}$.

Відповідь:

а) $y \uparrow,\ x \in (-\infty;\ -1)\ i\ (1;\ +\infty)$;

$y \downarrow,\ x \in (-1;\ 1)$;

$y_{\max} = y(-1) = 7$;

$y_{\min} = y(1) = 3.$

б) $y \uparrow,\ x \in (0;\ 1)$;

$y \downarrow,\ x \in (-\infty;\ 0)\ i\ (1;\ +\infty)$;

$y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{e^2}$;

$y_{\min} = y(0) = 0.$

4. Знайти інтервали опуклості та угнутості кривої, точки перегину функції $y = e^{-x^2}$.

Відповідь: $y \cup,\ x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\ i\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ +\infty\right)$.

$y \cap,\ x \in \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Точки перегину: $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{e}\right)$ та $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{e}\right)$.

5. Знайти асимптоти функції

а) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$; б) $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$.

Відповідь: а) $x = 0,\ \ y = x + 2$; б) $y = x + 1.$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3.1-3.2
Первісна. Невизначений інтеграл. Безпосереднє інтегрування. Заміна змінної та інтегрування частинами

Приклад 1. Знайдіть інтеграли: а) $\int\left(3\cos x-4x^2+\frac{1}{x}+5\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{4x^2+25}$; в) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}-\frac{3}{x^2-5}\right)dx$; г) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$ **.**

Розв'язання

Зводимо інтеграли до табличних.

а) $\int\left(3\cos x-4x^2+\frac{1}{x}+5\right)dx=3\int\cos x dx-4\int x^2dx+\int\frac{1}{x}dx+5\int dx=$

$=3\sin x-\frac{4x^3}{3}+\ln x+5x+C$.

б) $\int\frac{dx}{4x^2+25}=\frac{1}{4}\cdot\int\frac{dx}{x^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}\cdot arctg\frac{x}{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{10}arctg\frac{2x}{5}+C.$

в) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}-\frac{3}{x^2-5}\right)dx=\frac{2}{\sqrt{4}}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1/4}}dx-3\cdot\int\frac{1}{x^2-5}dx=$

$=.\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+(1/2)^2}}-3\int\frac{dx}{x^2-(\sqrt{5})^2}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|-3\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C.$

г) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{(1+x^2)+2x}{x(1+x^2)}dx=$

$=\int\left(\frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)}+\frac{2x}{x(1+x^2)}\right)dx==\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx=\ln|x|+2arctgx+C$.

Приклад 2. Знайдіть інтеграли, використовуючи властивість лінійності: а) $\int\frac{dx}{3x+1}$; б) $\int e^{-2x}dx$; в) $\int\sin 5x\,dx$; г) $\int\cos(7-0,5x)dx$.

Розв'язання

Застосовуючи властивість лінійності $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, будемо мати:

а) $\int\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\cdot\ln|3x+1|+C$.

б) $\int e^{-2x}dx=\frac{1}{-2}\cdot e^{-2x}+C=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$.

в) $\int\sin 5x\,dx=\frac{1}{5}\cdot(-\cos 5x)+C=-\frac{1}{5}\cos 5x+C$.

г) $\int\cos(7-0,5x)dx=\frac{1}{-0,5}\cdot\sin(7-0,5x)+C=-2\sin(7-0,5x)+C.$

Приклад 3. Знайдіть інтеграли, використовуючи внесення функції під знак диференціала: а) $\int\frac{dx}{(3x-2)^7}$; б) $\int\sqrt[5]{(7-3x)^4}dx$; в) $\int\left(1-x^2\right)^7 xdx$; г) $\int\frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$; г) $\int 2e^{-3x}dx$; д) $\int\sin(4-5x)dx$; е) $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; є) $\int e^{\cos x}\sin xdx$; ж) $\int\cos(\ln x)\frac{dx}{x}$.

Розв'язання

а) Внесемо $3x-2$ під знак диференціала, для цього спочатку знайдемо диференціал від цього виразу: $d(3x-2)=3dx$. Таким чином, потрібно помножити та поділити інтеграл на 3 і множник 3 внести під знак диференціала. У результаті дістанемо інтеграл, який береться за формулою $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, маємо:

$$\int \frac{dx}{(3x-2)^7} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-2)}{(3x-2)^7} = -\frac{1}{18(3x-2)^6} + C.$$

б) Міркуючи так само, як і в попередньому прикладі, маємо:

$$\int \sqrt[5]{(7-3x)^4}\,dx = \int \frac{(7-3x)^{\frac{4}{5}}\,d(7-3x)}{-3} = -\frac{5}{9\cdot 3}(7-3x)^{\frac{9}{5}} + C = -\frac{5}{27}(7-3x)^{\frac{9}{5}} + C.$$

в) Оскільки $d(1-x^2) = -2xdx,\ xdx = \frac{d(1-x^2)}{-2}$, шуканий інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int (1-x^2)^7 xdx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^7 d(1-x^2) = -\frac{(1-x^2)^8}{16} + C.$$

г) Оскільки $d(3x^2-5x+6) = (6x-5)dx$, шуканий інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(3x^2-5x+6)}{\sqrt{3x^2-5x+6}} = \frac{1}{2}\int (3x^2-5x+6)^{-\frac{1}{2}} d(3x^2-5x+6) =.$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3x^2-5x+6}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{3x^2-5x+6} + C.$$

г) Оскільки $d(-3x) = -3dx$, то маємо $dx = \frac{d(-3x)}{-3}$ і шуканий інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int 2e^{-3x}dx = 2\int e^{-3x}\frac{d(-3x)}{-3} = -\frac{2}{3}e^{-3x} + C.$$

д) Оскільки $d(4-5x) = -5dx$, то маємо $dx = \frac{d(4-5x)}{-5}$ і шуканий інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int \sin(4-5x)dx = \int \sin(4-5x)\frac{d(4-5x)}{-5} = \frac{1}{5}\cos(4-5x) + C.$$

е) Вираз $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2},\ \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$, тому

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = -\int e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

є) Вираз $d(\cos x) = \sin xdx, \sin xdx = -d(\cos x)$, тому

$$\int e^{\cos x}\sin xdx = \int e^{\cos x}\left(-d(\cos x)\right) = -e^{\cos x} + C.$$

ж) Вираз $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$, тому

$$\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x} = \int \cos(\ln x)\,d(\ln x) = \sin(\ln x) + C.$$

Приклад 4. Застосовуючи потрібну заміну змінної, обчисліть інтеграли: а) $\int \frac{dx}{1-2x}$; б) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$; в) $\int \frac{arctg^5 x}{1+x^2}dx$; г) $\int x\sqrt{x+1}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$; д) $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$; е) $\int \sin^2 x\cdot\cos^3 xdx$; є) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$; ж) $\int \sqrt{1-x^2}dx$.

Розв'язання

а) $\int \frac{dx}{1-2x} = \left| \begin{array}{l} 1-2x=t \\ x=\frac{t-1}{-2}=-\frac{t}{2}+\frac{1}{2} \\ dx=d\left(-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{t} =$

$= -\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln t + C = -\frac{1}{2}\ln\left|1-2x\right| + C$.

б) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx = \left| \begin{array}{l} e^x-1=t \\ e^x=t+1 \\ x=\ln(t+1) \\ dx=d\left(\ln\left(t+1\right)\right)=\frac{1}{t+1}dt \end{array} \right| = \int\frac{t+1}{t}\cdot\frac{1}{t+1}dt =$

$= \int\frac{1}{t}dt = \ln\left|t\right| + C = \ln\left|e^x-1\right| + C$.

в) $\int \frac{arctg^5 x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} arctgx=t \\ d(arctgx)=dt \\ \frac{1}{1+x^2}dx=dt \end{array} \right| = \int t^5dt = \frac{t^6}{6}+C = \frac{arctg^6 x}{6}+C$.

г) $\int x\sqrt{x+1}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1}=t \\ t^2=x+1 \\ x=t^2-1 \\ dx=2tdt \end{array} \right| == \int\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int\left(t^4-t^2\right)dt =$

$= \frac{2t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+C = \frac{2\sqrt{\left(x+1\right)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{\left(x+1\right)^3}}{3}+C.$

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt[6]{x} \\ x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{array} \right| = \int\frac{6t^5dt}{t^3-t^2} = 6\int\frac{t^3}{t-1}dt =$

$= 6\int\frac{t^3-1+1}{t-1}dt = 6\int\frac{t^3-1}{t-1}dt + 6\int\frac{dt}{t-1} = 6\int\left(t^2+t+1\right)dt + 6\int\frac{dt}{t-1} =$

$= 2t^3+3t^2+6t+6\ln\left|t-1\right|+C = 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$.

д) $\int\frac{x^2dx}{\left(x-1\right)^{10}} = \left| \begin{array}{l} t=x-1 \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int\frac{\left(t+1\right)^2}{t^{10}}dt = \int\frac{t^2+2t+1}{t^{10}}dt = \int\frac{dt}{t^8}+2\int\frac{dt}{t^9}+$ $+\int\frac{dt}{t^{10}} =$

$= -\frac{1}{7t^7}-\frac{1}{4t^8}-\frac{1}{9t^9}+C = -\frac{1}{7\left(x-1\right)^7}-\frac{1}{4\left(x-1\right)^8}-\frac{1}{9\left(x-1\right)^9}+C.$

е) Зробимо заміну $t=\sin x$. Враховуючи той факт, що $\cos^3 xdx=\cos^2 x\cdot\cos xdx=\cos^2 x\cdot d\left(\sin x\right)$, маємо:

$\int\sin^2 x\cdot\cos^3 xdx = \int\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right) = \int t^2\left(1-t^2\right)dt = \int\left(t^2-t^4\right)dt =$

$= \frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C = \frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$.

є) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{3+e^x} = t \\ e^x = t^2 - 3 \\ x = \ln\left(t^2-3\right) \\ dx = \frac{2tdt}{t^2-3} \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{t\left(t^2-3\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2-3} =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3+e^x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+e^x}+\sqrt{3}}\right| + C.$

ж) Для того, щоб позбутись від ірраціональності під знаком інтегралу, виконаємо тригонометричну заміну: $x = \sin t$, $t = \arcsin x, dx = \cos t dt$, тоді

$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt == \frac{1}{2}t +$

$+\frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C =$

$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$

Приклад 5. Обчисліть інтеграли методом інтегрування частинами: а) $\int x \cos 3x dx$; б) $\int \left(3x+2\right)\cdot 3^x dx$; в) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$; г) $\int \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x}}$; ґ) $\int \left(x^2+x-1\right)e^{2x}dx$.

Розв'язання

У заданих прикладах будемо застосовувати формулу інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$.

а) $\int x \cos 3x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos 3x dx \\ du = dx & v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3}x \sin 3x -$

$-\frac{1}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{9}\int \sin 3x d\left(3x\right) = = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$.

б) $\int \left(3x+2\right)\cdot 3^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x+2 & dv = 3^x dx \\ du = 3dx & v = \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\left(3x+2\right)\cdot 3^x -$

$-\frac{3}{\ln 3}\int 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}\left(3x+2\right)\cdot 3^x - \frac{3^{x+1}}{\ln^2 3} + C$.

в) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = \frac{dx}{x^2} \\ du = \frac{dx}{x} & v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$.

г) $\int \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x}} = \left| \begin{array}{ll} u = \arccos x & dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\ du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} \end{array} \right| =$

$= -2\sqrt{1-x}\arccos x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = -2\arccos x\sqrt{1-x} - 4\sqrt{1+x} + C$.

ґ) $\int \left(x^2+x-1\right)e^{2x}dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2+x-1 & dv = e^{2x}dx \\ du = \left(2x+1\right)dx & v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| =$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+x-1\right) - \frac{1}{2}\int \left(2x+1\right)e^{2x}dx =$(до останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами)=

$$=\begin{vmatrix} u=2x+1 & dv=e^{2x}dx \\ du=2dx & v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+x-1\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left(2x+1\right)\frac{e^{2x}}{2}-\int e^{2x}dx\right)==\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+x-1\right)-\frac{1}{4}\left(2x+1\right)e^{2x}+.$$

$$+\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)e^{2x}+C.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається первісною функцією?
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Як виконується перевірка правильності знаходження невизначеного інтегралу?
4. Перелічити основні властивості невизначеного інтеграла.
5. Перелічити інтеграли, що входять у таблицю невизначених інтегралів.
6. У чому полягає метод безпосереднього інтегрування?
7. У чому полягає інтегрування методом підстановки?
8. У чому полягає метод інтегрування частинами?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть інтеграли, користуючись властивостями інтегралів та таблицею основних невизначених інтегралів.

1.1. $\int 2x^3dx$. **1.2.** $\int \sqrt[5]{x^2}dx$. **1.3** $\int \frac{3dx}{x^4}$. **1.4.** $\int(3x+1)dx$. **1.5.** $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$. **1.6.** $\int\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)dx$. **1.7.** $\int \frac{2^x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}dx$. **1.8.** $\int\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)dx$. **1.9.** $\int \frac{x+e^x\cdot x^5-x^4}{x^5}dx$. **1.10.** $\int \frac{dx}{6+x^2}$. **1.11.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x^2}}$. **1.12.** $\int \frac{e^x-x\cdot 3^x}{3^x}dx$. **1.13.** $\int \frac{x^3-x}{x^5-2x^3+x}dx$. **1.14.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3+3x^2}}$. **1.15.** $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$. **1.16.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$. **1.17.** $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$.

Завдання 2. Знайдіть інтеграли використовуючи внесення функції під знак диференціала.

2.1. $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1}dx$. **2.2.** $\int \frac{20x-6}{2-3x+5x^2}dx$. **2.3.** $\int \frac{xdx}{\left(1-x^2\right)^2}$. **2.4.** $\int \frac{2x-1}{x^2-x-1}dx$. **2.5.** $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$. **2.6.** $\int xe^{-x^2}dx$. **2.7.** $\int e^{2x^2+2x-1}\left(2x+1\right)dx$. **2.8.** $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **2.9.** $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. **2.10.** $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$. **2.11.** $\int \frac{e^{-x}dx}{1-e^{-2x}}$. **2.12.** $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx.$ **2.13.** $\int \sin^6 x\cos xdx$. **2.14.** $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$. **2.15.** $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$. **2.16.** $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx$ **2.17.** $\int \frac{e^{tgx}+ctgx}{\cos^2 x}dx$. **2.18.** $\int \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$. **2.19.** $\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

Завдання 3. Застосовуючи потрібну заміну змінної, обчисліть інтеграли.

3.1. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2x-1}}$. **3.2.** $\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-3}}dx$. **3.3.** $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$. **3.4.** $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x\left(x+1\right)}dx$. **3.5.** $\int \frac{dx}{1-\sqrt[4]{x+1}}$. **3.6.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$. **3.7.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt[3]{x-1}-1\right)}$. **3.8.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}$. **3.9.** $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **3.10.** $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

Завдання 4. Обчисліть інтеграли методом інтегрування частинами.

4.1. $\int x\cos 5x dx$. **4.2.** $\int(x+2)e^x dx$. **4.3.** $\int x\cdot 2^{-x}dx$. **4.4.** $\int\sqrt{x}\ln x dx$. **4.5.** $\int\ln x dx$. **4.6.** $\int\arcsin x dx$. **4.7.** $\int arctg x dx$; **4.8.** $\int x\, arctg x dx$. **4.9.** $\int\frac{\lg x dx}{x^2}$. **4.10.** $\int x\sin^2 x dx$. **4.11.** $\int\frac{x dx}{\sin^2 x}$. **4.12.** $\int x^2\sin x dx$. **4.13.** $\int x^2e^{-2x}dx$. **4.14.** $\int(x^3+x+1)e^x dx$. **4.15.** $\int\frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$.

Відповіді: **1.1.** $\frac{1}{2}x^4+C$. **1.2.** $\frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7}+C$. **1.3.** $C-\frac{1}{x^3}$. **1.4.** $\frac{3}{2}x^2+x+C$. **1.5.** $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{6}{7}x\sqrt{x}-\frac{9}{2}x+18\sqrt{x}+3\right)+C$. **1.6.** $\frac{2}{3}x\left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)+C$. **1.7.** $\frac{2^{x-1}}{\ln 2}-\sqrt{x}+C$. **1.8.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x+C$. **1.9.** $C-\frac{1}{3x^3}+e^x-\ln|x|$. **1.10.** $\frac{\sqrt{6}}{6}arctg\frac{x}{\sqrt{6}}+C$. **1.11.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x+$ $+C.$ **1.12.** $\frac{e^x}{3^x(1-\ln 3)}-\frac{x^2}{2}+C$. **1.13.** $\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$. **1.14.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|x+\right.$ $\left.+\sqrt{1+x^2}\right|+C$. **1.15.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}+C$. **1.16.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C$. **1.17.** $C-\frac{1}{2}ctgx$. **2.1.** $\ln\left|3x^2-7x+1\right|+C$. **2.2.** $2\ln\left|2-3x+5x^2\right|+C$. **2.3.** $\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1}+C$. **2.4.** $\ln\left|x^2-x-1\right|+C$. **2.5.** $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3}+C$. **2.6.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$. **2.7.** $\frac{1}{2}e^{2x^2+2x-1}+C$. **2.8.** $2e^{\sqrt{x}}+C$. **2.9.** $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1}\right)+C$. **2.10.** $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$. **2.11.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+$ $+C.$ **2.12.** $\frac{\ln^3 x}{3}+C$. **2.13.** $\frac{\sin^7 x}{7}+C$. **2.14.** $-\ln(1+\cos x)+C$. **2.15.** $-\sqrt{1+2\cos x}+C$. **2.16.** $\sin\ln x+C$. **2.17.** $e^{tgx}+\ln|tgx|+C$. **2.18.** $\ln|\arcsin x|+C$. **2.19.** $-\frac{1}{6}\arccos^3 2x+C$. **3.1.** $\frac{2x-1}{280}(40x^3+$ $+24x^2+16x+16)+C$. **3.2.** $C-2\sqrt{x-3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}$. **3.3.** $C-2\sqrt{x}-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)^2$. **3.4.** $2arctg\sqrt{x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C.$ **3.5.** $C-$ $-4\sqrt[4]{x+1}-2\sqrt{x+1}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3}-4\ln\left|1-\sqrt[4]{x+1}\right|$. **3.6.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+$ $+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$. **3.7.** $6\sqrt[6]{x-1}$ $+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x-1}-1}{\sqrt[6]{x-1}+1}\right|+C$. **3.8.** $C-2\sqrt[4]{x}\left(2+\sqrt[4]{x}\right)+4\ln\left|1-\sqrt[4]{x}\right|$. **3.9.** $\frac{2\cdot 3^{\sqrt{x}}}{\ln 3}+C$. **3.10.** $C+$ $+\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)$. **4.1.** $\frac{x}{5}\sin 5x+\frac{1}{25}\cos 5x+C$ **4.2.** xe^x+e^x+C. **4.3.** $-\frac{x\cdot 2^{-x}}{\ln 2}-\frac{2^{-x}}{\ln^2 2}+C$. **4.4.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x$ $-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+C$. **4.5.** $x\ln x-$ $-x+C.$ **4.6.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **4.7.** $x\,arctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. **4.8.** $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}arctgx+C$. **4.9.** $-\frac{\lg x}{x}-\frac{1}{x\ln 10}+C$. **4.10.** $\frac{1}{8}(2x^2-$ $-2x\sin 2x-\cos 2x)+C$. **4.11.** $-xctgx+\ln|\sin x|+C$. **4.12.** $-x^2\cos x+$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3.3-3.4

Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен. Поняття комплексного числа

Приклад 1. Знайдіть інтеграли: а) $\int\frac{dx}{x^2+4x+29}$; б) $\int\frac{4x-5}{x^2-2x+5}dx.$

Розв'язання

а) I спосіб. Виділивши із квадратного тричлена повний квадрат $x^2+4x+29=(x+2)^2+25$, записавши $d(x+2)$ замість dx та інтегруючи, отримаємо:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+29}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+25}=\frac{1}{5}arctg\frac{x+2}{5}+C.$$

II спосіб. Застосуємо підстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, знайдемо утворений табличний інтеграл і повернемося до змінної x.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+29} = \left| \begin{matrix} x+\frac{b}{2a}=t & x=t-2 \\ x+\frac{4}{2}=t & dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{(t-2)^2+4(t-2)+29} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+25} = \frac{1}{5} arctg \frac{t}{5} + C = \frac{1}{5} arctg \frac{x+2}{5} + C.$$

б) I спосіб. Оскільки $\left(x^2-2x+5\right)' = 2x-2$, то знайдемо такі A і B, щоб виконувалась рівність: $4x-5 = A(2x-2)+B,$

$4x-5 = 2Ax-2A+B.$

Звідси $\begin{cases} 4 = 2A, \\ -5 = -2A+B. \end{cases}$ Отримаємо розв'язок $\begin{cases} A = 2, \\ B = -1. \end{cases}$

Отже, $4x-5 = 2(2x-2)-1.$

$$\int \frac{4x-5}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{2(2x-2)-1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{2(2x-2)}{x^2-2x+5}dx - \int \frac{dx}{x^2+2x+5} =$$

$$= 2\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = 2\ln\left|x^2-2x+5\right| - \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + C.$$

II спосіб. Застосуємо підстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, знайдемо утворений табличний інтеграл і повернемося до змінної x.

$$\int \frac{4x-5}{x^2-2x+5}dx = \left| \begin{matrix} x-\frac{2}{2}=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{4(t+1)-5}{(t+1)^2-2(t+1)+5}dt = \int \frac{4t-1}{t^2+4}dt =$$

$$= 2\int \frac{2tdt}{t^2+4} - \int \frac{dt}{t^2+4} = 2\ln\left|t^2+4\right| - \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = 2\ln\left|(x-1)^2+4\right| -$$

$$-\frac{1}{2} arctg \frac{x-1}{2} + C = 2\ln\left|x^2-2x+5\right| - \frac{1}{2} arctg \frac{x-1}{2} + C.$$

Приклад 2. Знайдіть інтеграли: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}$;

б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$.

Розв'язання

а) I спосіб. Перетворимо вираз під коренем (виділимо повний квадрат), внесемо множник під знак диференціала і знайдемо за таблицею інтегралів утворений інтеграл.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-4)^2+9}} = \int \frac{d(x-4)}{\sqrt{(x-4)^2+9}} = \ln\left|x-4+\sqrt{(x-4)^2+9}\right| +$$

$$+ C = \ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+25}\right| + C.$$

II спосіб. Застосуємо підстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, знайдемо утворений табличний інтеграл і повернемося до змінної x.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}} = \left| \begin{array}{c} x+\frac{-8}{2\cdot 1}=t \\ x-4=t \\ x=t+4 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+4)^2-8(t+4)+25}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right| + C = \ln\left|x-4+\sqrt{(x-4)^2+9}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+25}\right| + C.$$

<u>б) I спосіб.</u> В чисельнику відокремимо вираз, що є похідною підкореневого виразу знаменника: $\left(x^2-6x+1\right)' = 2x-6$. Знайдемо такі A і B, щоб виконувалась рівність: $A(2x-6)+B=x,$
$2Ax-6A+B=x.$

Отримаємо систему: $\begin{cases} 2A=1, \\ -6A+B=0. \end{cases}$ $\begin{cases} A=\frac{1}{2}, \\ B=3. \end{cases}$

Таким чином, $xdx = \left(\frac{1}{2}(2x-6)+3\right)dx.$

Тоді шуканий інтеграл набере вигляду:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-6)+3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2-6x+1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x-6)dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9-9+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2-6x+1\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(x^2-6x-1\right) + 3\int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-8}} = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2-6x+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} +$$

$$+3\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2-8}\right| + C = \sqrt{x^2-6x+1} + 3\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+1}\right| + C.$$

<u>II спосіб.</u> Застосуємо підстановку $x+\frac{b}{2a}=t$, знайдемо утворений табличний інтеграл і повернемося до змінної x.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \left| \begin{array}{c} x-3=t \\ x=t+3 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{t+3}{\sqrt{(t+3)^2-6(t+3)+1}}dt = \int \frac{t+3}{\sqrt{t^2-8}}dt =$$

$$= \int \frac{t}{\sqrt{t^2-8}}dt + 3\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-8}} = \int \left(t^2-8\right)^{-\frac{1}{2}} tdt + 3\ln\left|t+\sqrt{t^2-8}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(t^2-8\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(t^2-8\right) + 3\ln\left|t+\sqrt{t^2-8}\right| = \frac{1}{2}\frac{\left(t^2-8\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 3\ln\left|t+\sqrt{t^2-8}\right| =$$

$$= \sqrt{t^2-8} + 3\ln\left|t+\sqrt{t^2-8}\right| + C = \sqrt{(x-3)^2-8} + 3\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2-8}\right| + C =$$

$$= \sqrt{x^2-6x+1} + 3\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+1}\right| + C.$$

Комплексні числа

Приклад 1. Знайти x та y, вважаючи їх за дійсні, якщо:
$12((2x+1)(1+i)+(x+y)(3-2i)) = 41+6i$.

Відповідь: $x=\frac{1}{3}; y=\frac{1}{4}.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння:
а) $x^2-2x+5=0$, б) $x^2+4x+13=0$.
Відповідь: а) $x_{1,2}=1\pm i$, б) $x_{1,2}=-2\pm 3i$.

Приклад 3.Подати комплексні числа в тригонометричній формі:
1) 5; 2) $1-i\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{3}+3i$; 4) $3+3i$; 5) $\frac{1}{i}$; 6) $\frac{i-1}{i+1}$; 7) $\frac{2}{1+i\sqrt{3}}$.

Відповідь: 1) $5(\cos 0+i\sin 0)$, 2) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, 3) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

4) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, 6) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$,

7) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Приклад 4. Обчислити:
$$\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}+\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}.$$
Відповідь: $\frac{14}{5}i$.

Приклад 5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{cases}$$
Відповідь: $z_1=2+i$, $z_2=2-i$.

Приклад 6. Представити в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формі вираз:
$$\frac{(24i)^4\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}{(1+i)^5\left(-3-i\sqrt{3}\right)^8}.$$
Відповідь: $2^2\sqrt{2}(-0,2588-0,9659i)=128\sqrt{2}\left(\cos\frac{65}{12}\pi+i\sin\frac{65}{12}\pi\right)=2^7\sqrt{2}e^{\frac{65}{12}\pi i}$.

Приклад 7. Дані числа z_1 та z_2 подати в показниковій формі та виконати вказані дії над ними:

а) $z_1\cdot z_2$, якщо $z_1=2\sqrt{3}-2i$; $z_2=3-3\sqrt{3}i$;

б) $\frac{\overline{z_2}}{z_1}$, якщо $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $z_2=\sqrt{8-i\sqrt{8}}$.

Відповідь: а) $24e^{-\frac{\pi}{2}i}$; б) $2e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння:
а) $x^2-2x+5=0$, б) $x^2+4x+13=0$.
Відповідь: а) $x_{1,2}=1\pm i$, б) $x_{1,2}=-2\pm 3i$.

Приклад 9. Подати в канонічному вигляді многочлени:

1. $x^4-2x^3-3x^2+4x+4$
2. $x^4+2x^3-16x^2-2x+15$
3. $x^4+5x^3-12x^2+5x+1$
4. $x^4-3x^3-8x^2-12x+16$
5. $2x^4+x^3-49x^2+96x-36$
6. $x^4-x^3+2x^2+x-3$

Відповідь:

1. $(x+1)^2(x-2)^2$
2. $(x-1)(x+1)(x+5)(x-3)$
3. $(x-1)^2\left[x+\frac{1}{2}\left(7+3\sqrt{5}\right)\right]\left[x-\frac{1}{2}\left(7-3\sqrt{5}\right)\right]$
4. $(x+1)(x-2)(x+2)(x-4)$
5. $2(x-2)(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+6)$
6. $(x-1)(x+1)(x^2-x+3)$

Приклад 10. Обчислити:

$$\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}+\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}.$$

Відповідь: $\frac{14}{5}i.$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3.5
Інтегрування дробових раціональних функцій

Приклад 1. Знайдіть інтеграли від раціональних дробів: а) $\int\frac{x^4-3x^2+4x}{x^2-1}dx$; б) $\int\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$; в) $\int\frac{x^2-7x+2}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$.

Розв'язання

а) $\int\frac{x^4-3x^2+4x}{x^2-1}dx$

Оскільки підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, то виділимо з нього цілу частину, тобто представимо його у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу. Розділимо многочлен у чисельнику на многочлен у знаменнику.

$$\begin{array}{rl|l} - & x^4-3x^2+4x & x^2-1 \\ & x^4-x^2 & \overline{x^2-2} \\ \hline - & -2x^2+4x & \\ & -2x^2+2 & \\ \hline & 4x-2 & \end{array}$$

Даний інтеграл набуде вигляду:

$$\int\frac{x^4-3x^2+4x}{x^2-1}dx=\int\left(x^2-2+\frac{4x-2}{x^2-1}\right)dx\cdot$$

Розкладемо правильний раціональний дріб на суму найпростіших дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:

$\frac{4x-2}{x^2-1}=\frac{4x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1}$. Відкинемо знаменники і прирівняємо ліву і праву частини:

$$4x-2=(A+B)x+(A-B).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо:

$$x^1 \;\Big|\; A+B=4$$

$x^0 \quad A-B=-2$

Розв’язуючи систему лінійних рівнянь, одержимо значення невизначених коефіцієнтів: $A = 1$; $B = 3$.

Тоді : $\dfrac{4x-2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$.

Знайдемо даний інтеграл, враховуючи отриманий розклад:

$$\int\frac{x^4-3x^2+4x}{x^2-1}dx=\int\left(x^2-2+\frac{4x-2}{x^2-1}\right)dx=\int\left(x^2-2+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-2x+\ln|x-1|+3\ln|x+1|+C\ .$$

б) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$

Розкладемо підінтегральну функцію (правильний раціональний дріб) на суму найпростіших дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Розкладання шукаємо у вигляді:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}\ .$$

Звівши до загального знаменника, одержимо:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)(x^2+1)x}{x(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(A+D)x^4+Ex^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A}{x(x^2+1)^2}.$$

Відкинемо знаменники і прирівняємо ліву і праву частини:

$$x^2-1=(A+D)x^4+Ex^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A\ .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо систему:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A+D=0 \\ x^3 & E=0 \\ x^2 & 2A+B+D=1 \\ x^1 & C+E=0 \\ x^0 & A=-1 \end{array}$$

Розв’язуючи систему з п'яти лінійних рівнянь, знаходимо невизначені коефіцієнти: $A=-1;\ B=2;\ C=0;\ D=1;\ E=0.$

Тоді розклад дробу має вигляд:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}\ .$$

Знаходимо даний інтеграл, враховуючи отриманий розклад:

$$\int\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)dx=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{x^2+1}dx+$$

$$+\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}=\left|\begin{array}{l} x^2+1=t \\ d(x^2+1)=dt \\ 2xdx=dt \end{array}\right|=$$

$$=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\int\frac{dt}{t^2}=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\frac{1}{t}+C=$$

$$=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\frac{1}{x^2+1}+C\ .$$

в) $\displaystyle\int\frac{x^2-7x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$

Розкладемо підінтегральну функцію (правильний раціональний дріб) на суму найпростіших дробів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Розкладання шукаємо у вигляді:

$$\frac{x^2-7x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}.$$

Звівши до загального знаменника, одержимо:

$$\frac{x^2-7x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}.$$

Відкинемо знаменники і прирівняємо ліву і праву частини:

$$x^2-7x+2=A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2).$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів застосуємо метод частинних значень. Надамо x частинні значення $x=1,\ x=-2,\ x=3$, при яких множники обертаються в нуль, тобто підставимо ці значення в останній вираз і одержимо три рівняння:

$$\begin{array}{l|lr} x=1 & -4=-6A; & A=\frac{2}{3}; \\ x=-2 & 20=15B; & B=\frac{4}{3}; \\ x=3 & -10=10C; & C=-1. \end{array}$$

Тоді розклад дробу має вигляд:

$$\frac{x^2-7x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}.$$

Знаходимо даний інтеграл, враховуючи отриманий розклад:

$$\int\frac{x^2-7x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx=\int\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}\right)dx=\frac{2}{3}\ln|x-1|+ \quad +\frac{4}{3}\ln|x+2|-\ln|x-3|+C.$$

Запитання для самоперевірки

1. Який раціональний дріб називається правильним?
2. Які раціональні дроби називаються елементарними?
3. Як інтегруються найпростіші дроби чотирьох типів?
4. Які способи використовують при інтегруванні раціональних дробів?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть інтеграли, що містять квадратний тричлен.

1.1. $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$. **1.2.** $\int\frac{xdx}{x^2+4x+8}$. **1.3.** $\int\frac{dx}{3x^2+4x+2}$. **1.4.** $\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}$. **1.5.** $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$. **1.6.** $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+6x+5}}$. **1.7.** $\int\frac{\cos xdx}{14-6\sin x+\cos^2 x}$.

Завдання 2. Обчисліть інтеграли від дробово-раціональних функцій.

2.1. $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$. **2.2.** $\int\frac{xdx}{2x^2-3x-2}$. **2.3.** $\int\frac{2x+11}{x^2+6x+13}dx$. **2.4.** $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$.

2.5. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$. **2.6.** $\int\frac{\left(x^2+2\right)dx}{(x-1)(x+1)^2}$.

2.7. $\int\frac{x^5dx}{x^3+2}$. **2.8.** $\int\frac{2x^3+x^2+5x+1}{\left(x^2+3\right)\left(x^2-x+1\right)}dx$.

Відповіді: **1.1.** $\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C$. **1.2.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right|-$ $-arctg\left(1+\frac{x}{2}\right)+C$. **1.3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{3x+2}{\sqrt{2}}+C$. **1.4.** $\arcsin\frac{x-3}{2}+C$. **1.5.** $\frac{1}{2}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\right|+C$. **1.6.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\frac{3}{5}+\sqrt{x^2+\frac{6}{5}x+1}\right|+ +C$. **1.7.** $\frac{1}{2}arctg(\sin x-3)+C$. **2.1.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$. **2.2.** $\frac{2}{5}\ln|x-2|+$

$+\frac{1}{10}\ln|2x+1|+C$. **2.3.** $\ln\left|x^2+6x+13\right|+\frac{5}{2}arctg\frac{x+3}{2}+C$. **2.4.** $x+\ +3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **2.5.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|+C$. **2.6.** $\frac{3}{2}(x+1)^{-1}+\ \ +\frac{1}{4}\ln\left|(x+1)(x-1)^3\right|+C$. **2.7.** $\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\ln\left|x^3+2\right|+C$. **2.8.** $\ln\left|x^2-x+1\right|+\ +\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3.6-3.7

Визначений інтеграл та його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи обчислення визначених інтегралів. Геометричні застосування визначеного інтеграла

Приклад 1. Обчисліть визначені інтеграли: а) $\int_1^4\left(2x-3\sqrt{x}+1\right)dx$; б) $\int_2^9\sqrt[3]{x-1}dx$; в) $\int_0^1\left(e^x-1\right)^4e^xdx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2xdx$; г) $\int_0^1\frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Розв'язання

Використовуючи таблицю інтегралів та формулу Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$, маємо:

а) $\int_1^4\left(2x-3\sqrt{x}+1\right)dx=2\int_1^4 xdx+3\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx+\int_1^4 dx=x^2\Big|_1^4-2x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4+x\Big|_1^4=$

$=(16-1)-2\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right)+(4-1)=15-14+3=4$.

б) $\int_2^9\sqrt[3]{x-1}dx=\int_2^9(x-1)^{1/3}d(x-1)=\frac{3}{4}(x-1)^{4/3}\Big|_2^9=12-\frac{3}{4}=11\frac{1}{4}$.

в) $\int_0^1\left(e^x-1\right)^4e^xdx=\int_0^1\left(e^x-1\right)^4d\left(e^x-1\right)=\frac{1}{5}\left(e^x-1\right)^5\Big|_0^1=\frac{1}{5}(e-1)^5$.

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2xd(2x)=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-$

$-\frac{1}{4}\sin2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

г) $\int_0^1\frac{dx}{x^2+4x+13}=\int_0^1\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+9}=\frac{1}{3}arctg\frac{x+2}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}arctg\frac{2}{3}$.

Приклад 2. Обчисліть визначені інтеграли методом підстановки: а) $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int_0^{\ln2}\sqrt{e^x-1}\,dx$; в) $\int_1^{e^\pi}\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

Розв'язання

$$а)\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2t\,dt \\ x_1=0 \Rightarrow t_1=\sqrt{0}=0 \\ x_2=4 \Rightarrow t_2=\sqrt{4}=2 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\cdot\int_0^2 \frac{(1+t)-1}{1+t}dt =$$

$$= 2\cdot\int_0^2 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \left(2t-2\ln|t+1|\right)\Big|_0^2 = 4-2\ln 3-(0-2\ln 1) = 4-2\ln 3.$$ б)

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{e^x-1}=t \\ x=\ln\left(1+t^2\right) \\ dx=\dfrac{2t\,dt}{1+t^2} \\ x_1=0 \quad \Rightarrow \quad t_1=\sqrt{e^0-1}=\sqrt{1-1}=0 \\ x_2=\ln 2 \;\Rightarrow\; t_2=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=\sqrt{2-1}=1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 t\cdot\frac{2t\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \left(\frac{\left(1+t^2\right)-1}{1+t^2}\right)dt = 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 2\left(t-arctg\,t\right)\Big|_0^1 = 2(1-arctg 1)-2(0-arctg\,0) = 2-2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{2}.$$

$$в)\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x=t \\ \dfrac{dx}{x}=dt \\ x_1=1 \quad \Rightarrow \quad t_1=\ln 1=0 \\ x_2=e^\pi \;\Rightarrow\; t_2=\ln e^\pi=\pi \end{array} \right| = \int_0^\pi \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^\pi =$$

$$= -\cos\pi-(-\cos 0) = -(-1)-(-1) = 1+1 = 2.$$

Приклад 3. Обчисліть визначені інтеграли методом інтегрування частинами: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$; б) $\int_1^e x\ln x\,dx$.

Розв'язання

Застосовуємо формулу інтегрування частинами $\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$.

$$а)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=x & dv=\cos 2xdx \\ du=dx & v=\int\cos 2x\,dx=\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \frac{\pi\sin\pi}{4} - 0 + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(\cos\pi-\cos 0) = \frac{1}{4}(-1-1) = -\frac{1}{2}.$$ б)

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln x & dv=xdx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left(\frac{x^2\ln x}{2}\right)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається визначеним інтегралом функції на відрізку?
2. Перелічіть основні властивості визначеного інтеграла.
3. Сформулюйте формулу Ньютона-Лейбніца.
4. У чому полягає інтегрування методом підстановки визначеного інтеграла?
5. У чому полягає метод інтегрування частинами визначеного інтеграла?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Знайдіть інтеграли.

1.1. $\int_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}dx$. **1.2.** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$. **1.3.** $\int_2^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$. **1.4.** $\int_e^{e^x} \frac{dx}{x\ln x}$. **1.5.** $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. **1.6.** $\int_0^{\pi/8} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx$. **1.7.** $\int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. **1.8.** $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$. **1.9.** $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$. **1.10.** $\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}dx$.

Завдання 2. Обчисліть визначені інтеграли методом підстановки.

2.1. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$. **2.2.** $\int_{\alpha}^{\pi/4} ctg^4\varphi d\varphi$. **2.3.** $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$. **2.4.** $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$. **2.5.** $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$.

2.6. $\int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$.

Завдання 3. Обчисліть визначені інтеграли методом інтегрування частинами.

3.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$. **3.2.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$. **3.3.** $\int_1^e x\ln x dx$. **3.4.** $\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot arctg x dx$. **3.5.** $\int_0^1 x^3\cdot e^x dx$.

Відповіді: **1.1.** $3\frac{57}{64}$. **1.2.** $\frac{7}{72}$. **1.3.** $\sqrt{e}-\sqrt[3]{e}$. **1.4.** $\ln 2$. **1.5.** 2. **1.6.** $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. **1.7.** 2. **1.8.** $\sin 1$. **1.9.** $arctg e-\frac{\pi}{4}$. **1.10.** $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$. **2.1.** $\frac{\pi}{6}$. **2.2.** $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\varphi+\frac{ctg^3\varphi}{3}-ctg\varphi$. **2.3.** $1-\frac{\pi}{4}$. **2.4.** $\frac{81\pi}{16}$. **2.5.** $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. **2.6.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$. **3.1.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. **3.2.** 1. **3.3.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.4.** $6-2e$. **3.5.** $10\sqrt{e}-16$.

Застосування визначеного інтеграла

Приклад 1. Обчисліть площі фігур, обмежених лініями: а) $y=x^2-2x;\ y=0;\ x=0;\ x=3$; б) $y=x^2-4$; $2x+y+1=0$.

Розв'язання

а) $y=x^2-2x;\ y=0;\ x=0;\ x=3$

Фігура обмежена віссю Ox ($y=0$) і параболою $y=x^2-2x$ на відрізку $[0;\,3]$.

Побудуємо параболу. Знайдемо точки перетину параболи з віссю Ox. Для цього надамо $y=0$:

$y=x^2-2x=0$; $x^2-2x=0$; $x\cdot(x-2)=0$; $x_1=0,\ x_2=2$.

Знайдемо координати вершини параболи:

$x_{вер}=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2\cdot 1}=1$, $y_{вер}=y(x_{вер})=y(1)=1^2-2\cdot 1=-1$.

Парабола $y = x^2 - 2x$ має вершину в точці з координатами $(1; -1)$ і гілки її спрямовано вгору. Фігура, обмежена заданими лініями зображена на рис. 1.

Площа шуканої фігури дорівнює сумі площ двох криволінійних трапецій: $S = S_1 + S_2$.

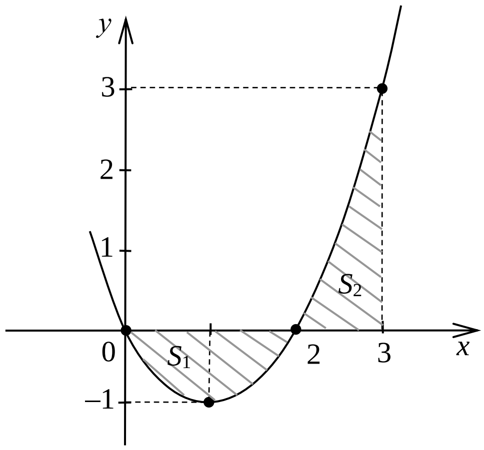


Рис. 1

Знаходимо площу:

$$S_1 = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 == -\left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) + 0 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_2^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3^2\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) = 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$. Тоді площа заданої плоскої фігури дорівнює:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

б) $y = x^2 - 4$; $2x + y + 1 = 0.$

Фігура обмежена параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $2x + y + 1 = 0$.

Знайдемо межі інтегрування, тобто точки перетину прямої і параболи. Для цього розв'яжемо систему, складену з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases};$$

$x^2 - 4 = -2x - 1$; $\quad x^2 + 2x - 3 = 0$; $(x+3)(x-1) = 0$;

$x_1 = -3,\ x_2 = 1$.

Отже, парабола і пряма перетинаються в точках з абсцисами $x_1 = -3$ і $x_2 = 1$.

Фігура, обмежена заданими лініями зображена на рис. 2.

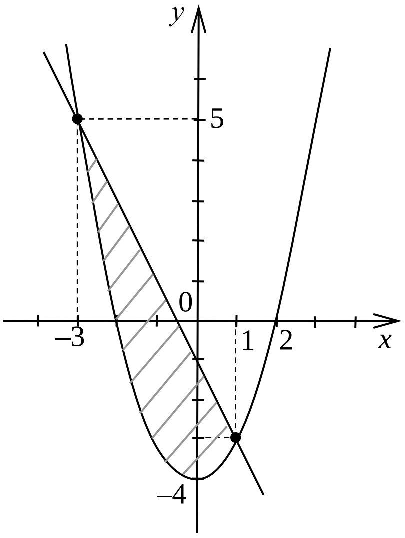


Рис. 2

Площу фігури визначаємо за формулою: $S=\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$,

де лінією $y=f_2(x)$ є пряма $y=-2x-1$ (обмежує фігуру зверху), а лінією $y=f_1(x)$ є парабола $y=x^2-4$ (обмежує фігуру знизу).

$$S=\int\limits_{-3}^{1}\left(-2x-1-\left(x^2-4\right)\right)dx=\int\limits_{-3}^{1}\left(-x^2-2x+3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-\left(-\frac{-27}{3}-9-9\right)=1\frac{2}{3}+9=10\frac{2}{3}.$$

Приклад 2. Обчисліть довжину дуги кривої $y=e^x+1$ від $x=\ln\sqrt{8}$ до $x=\ln\sqrt{15}$.

Розв'язання

Застосуємо формулу $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$. Спочатку знайдемо похідну заданої функції: $y'=\left(e^x+1\right)'=e^x$. Підставимо похідну у формулу для обчислення дуги кривої. Межі проміжку інтегрування дорівнюють: $a=\ln\sqrt{8}$; $b=\ln\sqrt{15}$.

$$l=\int\limits_{\ln\sqrt{8}}^{\ln\sqrt{15}}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1+e^{2x}}=t\\ e^{2x}=t^2-1\\ x=\dfrac{\ln(t^2-1)}{2}\\ dx=\dfrac{tdt}{t^2-1}\\ x_1=\ln\sqrt{8}\ \Rightarrow\ t_1=\sqrt{1+e^{2\ln\sqrt{8}}}=\sqrt{1+8}=3\\ x_2=\ln\sqrt{15}\ \Rightarrow\ t_2=\sqrt{1+e^{2\ln\sqrt{15}}}=\sqrt{1+15}=4\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_3^4 t\cdot\frac{tdt}{t^2-1}=\int\limits_3^4\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int\limits_3^4\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=\int\limits_3^4\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_3^4=$$

$$=4+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}-\left(3+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{4}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}.$$

Приклад 3. Обчислити об’єм тіла обертання: а) утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2=4x;\ x=1;\ x=3$; б) утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y=\frac{4}{x};\ y=1;\ y=4$.

Розв’язання

а) Побудуємо плоску фігуру, обмежену параболою $y^2=4x$ (гілки спрямовані вправо) і вертикальними прямими $x=1;\ x=3$, а також тіло, утворене обертанням навколо осі Ox цієї плоскої фігури (рис. 3).

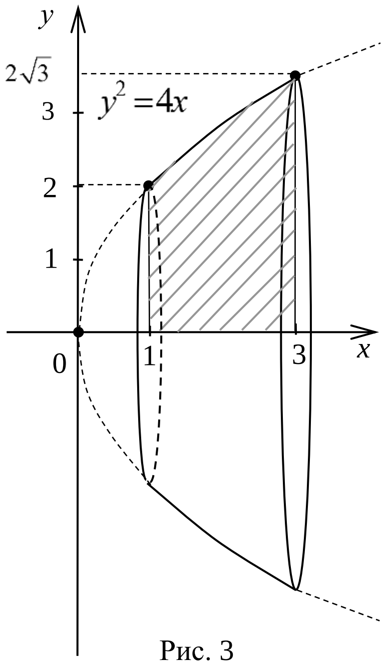


Рис. 3

Визначимо об'єм тіла обертання, підставивши функцію $y^2=4x$ у формулу для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі Ox:

$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_1^3 4xdx=4\pi\int_1^3 xdx=4\pi\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3=2\pi x^2\Big|_1^3=2\pi\cdot(9-1)=16\pi.$ б) Побудуємо плоску фігуру, обмежену гіперболою $y=\frac{4}{x}$ і горизонтальними прямими $y=1;\ y=4$, а також тіло, утворене обертанням навколо осі Oy цієї плоскої фігури (рис. 4). Визначимо об'єм тіла обертання, підставивши функцію $x=\frac{4}{y}$ у формулу для знаходження об'єму тіла обертання навколо осі Oy $V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$:

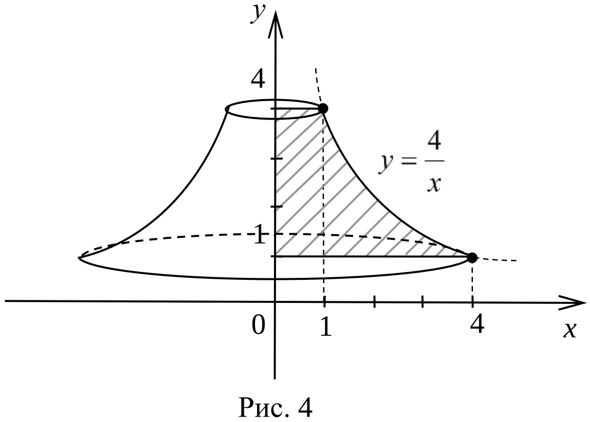


Рис. 4

$V_y=\pi\int_1^4\left(\frac{4}{y}\right)^2dy=\pi\int_1^4\frac{16}{y^2}dy=16\pi\left(\frac{y^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^4=-16\pi\left(\frac{1}{y}\right)\Bigg|_1^4=-16\pi\left(\frac{1}{4}-1\right)=12\pi.$ **Приклад 4.** Функція маргінальних витрат фірми має вигляд: $V'(x)=11,2+0,1\cdot e^{-0,01x}$. Знайти зростання загальних витрат, коли виробництво зростає з 100 до 200 одиниць.

Розв'язання

Зміну загальних витрат знаходимо за формулою:

$$\int_{100}^{200}V'(x)dx=\int_{100}^{200}(11,2+0,1e^{-0.01x})dx=11,2x\Big|_{100}^{200}-\frac{0,1}{0,01}e^{-0,01x}\Big|_{100}^{200}=$$

$=11,2\cdot200-11,2\cdot100-10e^{-2}+10e^{-1}=2240-1120-1,35+3,68=1122,3.$ Тобто витрати зростуть на 1122.3 грошові одиниці.

Приклад 5. Швидкості зміни витрат та доходу підприємства після початку його діяльності визначаються формулами: $V'(t)=6+t^{\frac{3}{4}}$, $D'(t)=30-2t^{\frac{3}{4}}$, де $V(t),\ D(t)$ виміряється мільйонами гривень, а t виміряється роками. Визначити час, за який буде отримано максимальний прибуток, та знайти цей прибуток.

Розв'язання

Оптимальний час t_1 для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t)=V'(t)$:

$$30-2t^{\frac{3}{4}}=6+t^{\frac{3}{4}}\Rightarrow3t^{\frac{3}{4}}=24\Rightarrow t^{\frac{3}{4}}=8\Rightarrow t_1=8^{\frac{4}{3}}=16.$$

Отже максимум прибутку підприємство отримує за 16 років. Прибуток за цей час складе:

$$P(16)=\int_0^{16}(D'(t)-V'(t))dt=\int_0^{16}(24-3t^{\frac{3}{4}})dt=(24t-3\frac{t^{7/4}}{7/4})\Bigg|_0^{16}=164,6.$$

Приклад 6. Яка робота виконується під час розтягування пружини на *7м*, якщо відомо, що для розтягування пружини на 1см витрачається сила $4H$.

Розв'язання. Згідно із законом Гука сила у ньютонах, яка розтягує пружину на x м, дорівнює $F=kx$. Знайдемо коефіцієнт пропорційності з умови: якщо $x=0,01$м, то $X=4$Н; тобто, $k=\frac{4}{0,01}=400$ і $F(x)=400x$, $0\le x\le0,07$. Тоді, користуючись формулою $A=\int_a^bF(x)dx$, будемо мати:

$$A=\int_0^{0,07}400xlx=200x^2\Big|_0^{0,07}=200\,(0,07^2-0^2)=0,98\text{Дж}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які існують геометричні застосування визначеного інтеграла?
2. Як обчислити площу плоскої фігури, обмеженої заданими лініями?
3. Як обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями, навколо координатної осі?
4. Як обчислити довжину дуги плоскої кривої?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть площу, обмежену параболою $x=2y^2$ та прямою $x=4$.

Завдання 2. Обчисліть площу, що міститься між прямими $y=x+3$, $y=5-x$ та віссю Ox.

Завдання 3. Обчисліть площу, обмежену кривими $y=e^x, y=e^{-x}$ та прямою $x=1$.

Завдання 4. Знайдіть площу трикутника, обмеженого прямими $y=x,\ y=2x$ та $y+x=6$.

Завдання 5. Знайдіть площу, обмежену кривою $y=x^2-6x+9$ та прямою $y=9-2x$.

Завдання 6. Обчисліть площу, обмежену кривими $y=\sin x, y=\cos x$ та віссю Ox.

Завдання 7. Знайдіть довжину дуги кривої $y=\arccos e^{-x}$ від точки $x=0$ до $x=1$.

Завдання 8. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=7x-x^2-12,\ \ y=0$ навколо осі Ox.

Завдання 9. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=\frac{x^2}{2}$ і $2x+2y-3=0$, навколо осі Ox.

Завдання 10. Нехай функція маргінальних витрат виробництва за певний час має вигляд: $V'(x)=80-0{,}1x$. Визначте зростання витрат виробництва при збільшенні випуску продукції від 50 до 60 одиниць.

Завдання 11. Швидкості зміни витрат та доходу підприємства після початку його діяльності визначаються формулами: $V'(t)=-1+3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t)=15-\sqrt[3]{t^2}$, де $V(t)$, $D(t)$ вимірюються млн. грн, а t – у роках. Визначте час, за який буде отримано максимальний прибуток, та знайти цей прибуток.

Завдання 12. Знайдіть, яка робота виконується під час стискання гвинтової пружини на 10 *см*, якщо для стискання пружини на 1 *см* витрачається сила 2*Н*?

Відповіді: **1.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$. **2.** 16. **3.** $e+\frac{1}{e}-2$. **4.** 3. **5.** $10\frac{2}{3}$. **6.** $2-\sqrt{2}$.
7. $\ln\left|e+\sqrt{e^2-1}\right|$. **8.** 36π. **9.** $\frac{272\pi}{15}$. **10.** 745 грн. **11.** $t=8$ років, $P=51{,}2$ млн.грн. **12.** 1 Дж.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.1-4.2
Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Знайти загальний інтеграл або розв'язки диференціальних рівнянь.

Приклад 1. $\left(x^2y-x^2\right)dy=\left(xy^2+y^2\right)dx.$

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$x^2(y-1)dy=y^2(x+1)dx\Rightarrow\frac{(y-1)dy}{y^2}=\frac{(x+1)dx}{x^2}\Rightarrow\Rightarrow\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)dy=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$\Rightarrow\ln|y|+\frac{1}{y}=\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\ln|x|+\ln C-\ln|y|\Rightarrow\ x+\frac{y}{xy}=\ln\left|\frac{Cx}{y}\right|\Rightarrow\ \frac{Cx}{y}=e^{\frac{x+y}{xy}}.$$

Відповідь: $\frac{Cx}{y}=e^{\frac{x+y}{xy}}$ — загальний інтеграл.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$\left(1-e^{y^2}\right)dy=\frac{dx}{2y},\ y(0)=0.$$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$\left(1-e^{y^2}\right)2ydy=dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int 2ydy-\int e^{y^2}\cdot 2ydy=\int dx\Rightarrow y^2-\int e^{y^2}dy^2=x+C\Rightarrow\ y^2-e^{y^2}=x+C.$$

Маємо загальний розв'язок, в який підставимо початкові умови:

$$0-1=0+C\Rightarrow C=-1.$$

Тоді: $y^2-e^{y^2}=x-1$ — частинний розв'язок.

Відповідь: $y^2-e^{y^2}=x-1$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$y' = x - \frac{y}{x} - 2y.$$

Розв'язання. Маємо однорідне диференціальне рівняння I порядку $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-2y}$. Введемо заміну $y = zx$. Тоді $dy = zdx + xdz$. Підставимо y і dy в останнє рівняння:

$$z + \frac{xdz}{dx} = \frac{1-z}{1-2z} \Rightarrow \frac{xdz}{dx} = \left(\frac{1-z}{1-2z}\right) - z \Rightarrow \frac{xdz}{dx} = \frac{1-z-z+2z^2}{1-2z};$$

$$\left(\frac{1-2z}{2z^2-2z+1}\right)dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{2\left(\frac{1}{2}-z\right)dz}{2\left(z^2-z+\frac{1}{2}\right)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\left(\frac{1}{2}-z\right)dz}{\left(\left(\frac{1}{2}-z\right)^2+\frac{1}{4}\right)} = \ln x + \ln C \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\left(\frac{1}{2}-z\right)^2+\frac{1}{4}\right)}{\left(\left(\frac{1}{2}-z\right)^2+\frac{1}{4}\right)} = \ln Cx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{1}{2}-z\right)^2+\frac{1}{4}\right) = \ln Cx \Rightarrow \ln Cx\sqrt{z^2-z+\frac{1}{2}} = 0.$$

$$Cx\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - yx + \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow C\sqrt{y^2-2yx^3+x^2} = 1$$ — загальний інтеграл.

Відповідь: $C\sqrt{y^2-2yx^3+x^2} = 1$.

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y'\operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x \operatorname{ctg} x, \quad y(0) = 0.$$

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння I порядку.

$$y' - \frac{y}{\operatorname{ctg} x} = 2\cos^2 x.$$

Введемо заміну $y = uv,\ y' = u'v + uv'$. Тоді вихідне рівняння набуде вигляду

$$u'v + uv' - \frac{uv}{\operatorname{ctg} x} = 2\cos^2 x,$$

або
$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{\operatorname{ctg} x}\right) = 2\cos^2 x.$$

Припустимо, що $v' - \frac{v}{\operatorname{ctg} x} = 0$. Тоді $u'v = 2\cos^2 x$. Знайдемо функцію $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{\operatorname{ctg} x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{\operatorname{ctg} x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \ln v = -\ln|\cos x| \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдемо функцію $u(x)$: $du = 2\cos^3 x dx$. Врахуємо, що

$$\cos^3 x = \cos x\left(1-\sin^2 x\right).$$

Тоді

$$\int du = 2\int\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx \Rightarrow u = 2\left[\int \cos x dx - \int \sin^2 x d(\sin x)\right] =$$

$$= 2\left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C\right]$$

і маємо загальний розв'язок $y=\frac{2}{\cos x}\left[\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C\right]$.

Враховуючи початкову умову $x=0,\ \ y=0$, знайдемо константу C.

$$0=\frac{2}{\cos 0}\left(\sin 0+\frac{\sin^3 0}{3}+C\right)\Rightarrow C=0.$$

Отже, $y=2\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{tg}x\sin^2 x}{3}$ є частинним розв'язком вихідного диференціального рівняння.

Відповідь: $y=2\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{tg}x\sin^2 x}{3}$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ОДНОРІДНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Завдання для аудиторної роботи (з розв'язками)

Знайти загальний інтеграл або розв'язки диференціальних рівнянь.

Приклади 1. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$\left(y^2-2xy\right)dx-x^2dy=0, y(1)=3.$$

Розв'язання. Маємо однорідне диференціальне рівняння І порядку

$$\frac{y^2-2xy}{x^2}=\frac{dy}{dx}.$$

Введемо заміну $y=zx,\ \ dy=zdx+xdz$. Тоді вихідне рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\left(z^2x^2-2zx^2\right)}{x^2}=\frac{(zdx+xdz)}{dx}.$$

Отримане рівняння зводиться до диференціального рівняння з відокремленими змінними:

$$z^2-2z=z+x\frac{dz}{dx}\Rightarrow x\frac{dz}{dx}=z^2-3z\Rightarrow\frac{dz}{\left(z^2-3z\right)}=\frac{dx}{x}.$$

Методом невизначених коефіцієнтів розкладаємо дріб $\frac{1}{\left(z^2-3z\right)}$ на прості дроби:

$$\frac{1}{\left(z^2-3z\right)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{(z-3)}=\frac{Az-3A+Bz}{z(z-3)};$$

$$\begin{cases}-3A=1\\ A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{3}\\ B=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{\left(z^2-3z\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z-3)}-\frac{1}{3z}.$$

Тоді

$$\frac{1}{3}\int\frac{dz}{(z-3)}-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{1}{3}\ln|z-3|-\frac{1}{3}\ln|z|=\ln|Cx|\Rightarrow\Rightarrow\ln\sqrt[3]{\frac{z-3}{z}}=\ln Cx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Cx=\sqrt{1-3\frac{x}{y}}$$ — маємо загальний розв'язок.

Якщо $x=1,\ \ y=3$, то $C=0$ і $y=3x$ — частинний розв'язок.

Відповідь: $y=3x$.

Приклади 2. $y'+2\frac{y}{x}=\frac{1}{x^3}$.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння I порядку. Введемо заміну $y = uv, y' = u'v + v'u$. Тоді вихідне рівняння набуде вигляду:

$$u'v + uv + \frac{2uv}{x} = \frac{1}{x^3}, \text{ або } u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^3}.$$

Припустимо, що $v' + 2\frac{v}{x} = 0$, тоді $u'v = \frac{1}{x^3}$.

Знайдемо функцію $v(x)$:

$$v' + 2\frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2\frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x} \Rightarrow \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -2\ln x \Rightarrow v = \frac{1}{x^2}.$$

Тепер знайдемо функцію $u(x)$.

$$u'x^{1/2} = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int du = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow u = \ln x + C.$$

Тоді маємо загальний розв'язок: $y = uv = \frac{(\ln x + C)}{x^2}$.

Відповідь: $y = \frac{\ln x + C}{x^2}$.

Приклади 3. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y'\operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x\operatorname{ctg} x, \quad y(0) = 0.$$

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння I порядку.

$$y' - \frac{y}{\operatorname{ctg} x} = 2\cos^2 x.$$

Введемо заміну $y = uv,\ y' = u'v + uv'$. Тоді вихідне рівняння набуде вигляду

$$u'v + uv' - \frac{uv}{\operatorname{ctg} x} = 2\cos^2 x,$$

або

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{\operatorname{ctg} x}\right) = 2\cos^2 x.$$

Припустимо, що $v' - \frac{v}{\operatorname{ctg} x} = 0$. Тоді $u'v = 2\cos^2 x$. Знайдемо функцію $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{\operatorname{ctg} x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{\operatorname{ctg} x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\operatorname{tg} x dx \Rightarrow \ln v = -\ln|\cos x| \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдемо функцію $u(x)$: $du = 2\cos^3 x dx$. Врахуємо, що

$$\cos^3 x = \cos x\left(1 - \sin^2 x\right).$$

Тоді

$$\int du = 2\int\left(1 - \sin^2 x\right)\cos x dx \Rightarrow u = 2\left[\int\cos x dx - \int\sin^2 x d(\sin x)\right] =$$

$$= 2\left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C\right]$$

і маємо загальний розв'язок $y = \frac{2}{\cos x}\left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C\right]$.

Враховуючи початкову умову $x = 0,\ y = 0$, знайдемо константу C.

$$0 = \frac{2}{\cos 0}\left(\sin 0 + \frac{\sin^3 0}{3} + C\right) \Rightarrow C = 0.$$

Отже, $y = 2\operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg} x\sin^2 x}{3}$ є частинним розв'язком вихідного диференціального рівняння.

Відповідь: $y = 2\operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg} x\sin^2 x}{3}$.

5.2. Домашнє завдання

Розв'язати рівняння:

1 Приклад

а) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$; $y(0)=1$;

б) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x,\ y(1)=0$;

в) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$;

г) $\dfrac{xdy}{x^2+y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx$.

Відповідь: а) $y = \dfrac{1+x}{1-y}$; в) $e^{\frac{y}{x}} = Cy$;

б) $y = \dfrac{x}{x+1}\left(x - 1 + \ln|x|\right)$;

в) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$; г) $x + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.3.
Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3}.$$

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним, оскільки його можна записати у вигляді рівняння (5.7)

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^3}, \text{ де } p(x) = \frac{2}{x},\ f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

За методом Бернуллі введемо заміну: $y = uv,$ тоді $y' = u'v + uv'$. Маємо

$$u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = \frac{1}{x^3},\ u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = \frac{1}{x^3}.$$

Складаємо систему $\begin{cases} v' + \dfrac{2}{x}v = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{x^3}. \end{cases}$

Інтегруючи перше з рівнянь системи, дістаємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x},\ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{2dx}{x},\ \ln v = -2\ln x,\ v = \frac{1}{x^2}.$$

Підставивши значення v у друге рівняння системи, дістанемо

$$u'\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3},\quad du = \frac{dx}{x},\ \int du = \int\frac{dx}{x},\ u = \ln x + C.$$

Отже, $y = uv = \dfrac{\ln x + C}{x^2}$ - загальний розв'язок рівняння.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

а) $y' + 2y = x^2 + 2x,\ y\big|_{x=0} = 1$;

б) $y'\operatorname{ctg}x - y = 2\cos^2 x \cdot \operatorname{ctg}x,\ y\big|_{x=0} = 0$.

Розв'язання. а) Задача Коші полягає у тому, щоб визначити частинний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи для цього початкову умову. З цією метою спочатку знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння.

Задане рівняння – лінійне (y і y' містяться в рівнянні лише в перших степенях). Розв'язуємо його за методом Бернуллі:

$$y = uv,\quad y' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' + 2uv = x^2 + 2x, \quad u'v + u\left(v' + 2v\right) = x^2 + 2x.$$

Складаємо систему $\begin{cases} v' + 2v = 0, \\ u'v = x^2 + 2x. \end{cases}$

Розв'язуємо перше з рівнянь системи:

$$v' + 2v = 0, \quad v' = -2v, \quad \frac{dv}{dx} = -2v, \quad \frac{dv}{v} = -2dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int dx, \quad \ln|v| = -2x, \quad v = e^{-2x}.$$

Підставивши отримане значення функції v в друге рівняння системи, дістанемо

$$u'e^{-2x} = x^2 + 2x, \quad u' = \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}, \quad du = \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}dx,$$

$\int du = \int \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}dx$, $u = \int \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}dx$.

Застосовуємо до інтеграла в правій частині рівняння двічі формулу інтегрування частинами $\int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1$:

$$u = \int \left(x^2 + 2x\right)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u_1 = x^2 + 2x, & du_1 = \left(2x + 2\right)dx \\ dv_1 = e^{2x}dx, & v_1 = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x\right)e^{2x} - \int \left(x + 1\right)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u_1 = x + 1, & du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x}dx, & v_1 = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x\right)e^{2x} -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\left(x + 1\right)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x\right)e^{2x} - \frac{1}{2}\left(x + 1\right)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C.$$

Отже, $u = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = uv = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C\right] \cdot e^{-2x},$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}.$$

Для розв'язання задачі Коші знайдемо значення сталої C, при якому частинний розв'язок задовольняє задану початкову умову:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} + Ce^{-2 \cdot 0}, \ 1 = -\frac{1}{4} + C, \ C = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Отже, частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2x}.$$

б) В рівнянні $y'\mathrm{ctg}x - y = 2\cos^2 x \cdot \mathrm{ctg}x$ поділимо ліву і праву частини на $\mathrm{ctg}x$: $y' - \frac{y}{\mathrm{ctg}x} = 2\cos^2 x$ і рівняння набуде вигляду лінійного рівняння (5.7), де

$p\left(x\right) = -\frac{1}{\mathrm{ctg}x}$, $f\left(x\right) = 2\cos^2 x$.

Введемо заміну: $y = uv, \ y' = u'v + uv',$ тоді

$$u'v + uv' - \frac{uv}{\mathrm{ctg}x} = 2\cos^2 x, \quad u'v + u\left(v' - \frac{v}{\mathrm{ctg}x}\right) = 2\cos^2 x.$$

Складаємо систему

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{\mathrm{ctg}x} = 0, \\ u'v = 2\cos^2 x. \end{cases}$$

Інтегруючи перше рівняння системи, дістаємо

$$\frac{dv}{v}=\frac{dx}{\text{ctg}x},\quad \int\frac{dv}{v}=\int \text{tg}x dx,\quad \ln|v|=-\ln|\cos x|,\quad v=\frac{1}{\cos x}.$$

Підставивши значення v у друге рівняння системи, дістаємо

$$\frac{du}{dx}=2\cos^3 x,\ du=2\cos^3 x dx,\ u=2\int\cos^2 x d(\sin x),$$

$u=2\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)=2\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)+C=2\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C.$ Отже,

$y=\frac{1}{\cos x}\left(2\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C\right)$ - загальний розв'язок заданого рівняння.

Застосувавши початкові умови $x=0,\ y=0,$ маємо $C=0.$

Отже, $y=\frac{1}{\cos x}\left(2\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x\right)$ або $y=\frac{2}{\cos x}\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)$ - частинний розв'язок заданого рівняння.

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння $y'+2y=x^2+2x,\quad y(x=0)=1.$

Розв'язання. Задача Коші полягає у тому, щоб визначити частинний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи для цього початкову умову.

З цією метою спочатку знаходимо загальний розв'язок диференціального рівняння, а потім використовуємо початкову умову і із загального розв'язку відбираємо частинний.

$y'+2y=x^2+2x$ - це лінійне рівняння.

Для його розв'язання потрібно ввести нову невідому функцію $y=uv;\ (y'=u'v+uv')$ і підставити вирази в дужках у рівняння

$u'v+uv'+2uv=x^2+2x;\quad u'v+u\ (v'+2v)=x^2+2x$.

Розв'яжемо систему двох рівнянь з відокремленими змінними для невідомих функцій “ u “ і “ v “

$$\begin{cases} v'+2v=0, \\ u'v=x^2+2x. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше з цих рівнянь

$$v'+2v=0,\quad v'=-2v,\quad dv=-2vdx,\quad \frac{dv}{v}=-2dx,$$

$$\ln|v|=-2x,\quad v=e^{-2x}\qquad (3)$$

Підставляємо отримане значення функції “ v “ в друге рівняння системи і розв'язуємо його

$$u'e^{-2x}=x^2+2x;\qquad u'=(x^2+2x)e^{2x};$$

$$\frac{du}{dx}=(x^2+2x)e^{2x};\quad du=(x^2+2x)e^{2x}dx;$$

$$u=\int(x^2+2x)e^{2x}dx=\begin{vmatrix} u_1=x^2+2x;\quad du_1=(2x+2)dx \\ dv_1=e^{2x}dx;\quad v_1=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}-\int(x+1)e^{2x}dx=\begin{vmatrix} u_1=x+1; & du_1=dx \\ dv_1=e^{2x}dx; & v_1=\frac{1}{2}e^{2x}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}-(\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx)=$$

$$=(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})e^{2x}+C.$$

Тепер записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y=uv=\left[\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{2x}+C\right]e^{-2x};$$

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+Ce^{-2x}.$$

Далі для розв'язання задачі Коші застосуємо початкову умову і знайдемо конкретне значення сталої " C ":

$$1=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{4}+Ce^{-2\cdot 0}; \quad 1=-\frac{1}{4}+C; \quad C=\frac{5}{4}.$$

Таким чином, частинний розв'язок диференціального рівняння такий:

$$y^*=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}e^{-2x}.$$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'+\frac{5}{x+2}y=(x+2)^2$, $\quad y(0)=\frac{1}{4}$.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. За методом Бернуллі шукаємо розв'язок рівняння у вигляді $y=uv$; $(y'=u'v+uv')$, де u і v – невідомі функції від x .підставивши вирази в дужках у рівняння отримаємо:

$$u'v+uv'+\frac{5}{x+2}uv=(x+2)^2; \quad u'v+u\ (v'+\frac{5}{x+2}v)=(x+2)^2 .$$

Розв'яжемо систему двох рівнянь з відокремленими змінними для невідомих функцій " u " і " v "

$$\begin{cases} v'+\frac{5}{x+2}v=0, \\ u'v=(x+2)^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше з цих рівнянь

$$v'+\frac{5}{x+2}v=0, \quad v'=-\frac{5}{x+2}v, \quad \frac{dv}{v}=-\frac{5}{x+2}dx, \quad \ln|v|=-5\ln|x+2|, \quad v=(x+2)^{-5}$$

Підставляємо отримане значення функції " v " в друге рівняння системи і розв'язуємо його

$$u'(x+2)^{-5}=(x+2)^2; \qquad u'=(x+2)^7;$$

$$\frac{du}{dx}=(x+2)^7; \quad du=(x+2)^7dx;$$

$$u=\int(x+2)^7dx=\frac{1}{8}(x+2)^8+C.$$

Тепер записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = uv = \left(\frac{1}{8}(x+2)^8 + C\right)(x+2)^{-5};$$

$$y = \frac{1}{8}(x+2)^3 + C\frac{1}{(x+2)^5}.$$

Знайдемо значення сталої “ C “:

$$y(0) = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{8}\cdot 2^3 + \frac{C}{2^5} = \frac{1}{4}; \quad 1 + \frac{C}{2^5} = \frac{1}{4}; \quad C = -24.$$

Таким чином, частинний розв’язок диференціального рівняння такий:

$$y^* = \frac{1}{8}(x+2)^3 - \frac{24}{(x+2)^5}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.5. – 4.7

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок заданих диференціальних рівнянь

а) $y'' - y' - 20y = 0$; б) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Розв’язання. Обидва задані рівняння – це лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

а) Складаємо характеристичне рівняння та знаходимо його корені

$$k^2 - k - 20 = 0; \quad k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2}; \quad k_1 = 5, \quad k_2 = -4.$$

Корені дійсні і різні, тому загальний розв’язок заданого диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-4x}$.

б) Запишемо характеристичне рівняння та знаходимо його корені

$k^2 - 6k + 9 = 0; \quad k_{1,2} = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 36}}{2} = \dfrac{6 \pm 0}{2}; \quad k_1 = k_2 = 3.$ Корені дійсні і рівні, тому загальний розв’язок заданого диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Приклад 2. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє вказані початкові умови $y'' + 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$.

Розв’язання. Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Спочатку знайдемо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння. Складаємо характеристичне рівняння та знаходимо його корені

$$k^2 + 6k + 13 = 0; \quad k_{1,2} = \frac{(-6) \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$$k_1 = -3 - 2i, \quad k_2 = -3 + 2i.$$

Корені рівняння комплексно спряжені, тому загальний розв’язок заданого диференціального рівняння має вигляд $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Для знаходження частинного розв’язку використовуємо початкові умови. Для цього спочатку знайдемо похідну y':

$$y' = -3e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-3x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x).$$

Знаходимо значення сталих C_1 та C_2

$$e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 1;$$

$$-3e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0) = 3,$$

або $\begin{cases} C_1 = 1, \\ -3C_1 + 2C_2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 3. \end{cases}$

Отже, шуканий частинний розв’язок $y = e^{-3x}(\cos 2x + 3\sin 2x)$.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

1 Приклад

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 2k - 3 = 0, \quad k_1 = -3, \quad k_2 = 1.$$

Тоді $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ — загальний розв'язок.

Відповідь: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$.

2 Приклад Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 6k + 9 = 0, \quad (k+3)^2 = 0, \; k_1 = k_2 = -3.$$

Тоді $y = e^{-3x}(C_1 x + C_2)$ — загальний розв'язок.

Відповідь: $y = e^{-3x}(C_1 x + C_2)$.

3 Приклад Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 4k + 5 = 0.$$

$$D = 4^2 - 5 \cdot 4 = -4, \quad k_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Тоді $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ — загальний розв'язок.

Відповідь: $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.8-4.9

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y'' + y = 2\sin x$, якщо $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Розв'язання. Розв'язок заданого неоднорідного диференціального рівняння будемо шукати у вигляді $\tilde{y} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Для визначення функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему виду :

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0; \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \sin x. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знаходимо $C_1'(x) = -2\sin^2 x$, $C_2'(x) = \sin 2x$. Звідки

$$\tilde{N}_1(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x, \; C_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Отже, розв'язком заданого неоднорідного диференціального рівняння є функція

$$\tilde{y} = -\frac{1}{2}\cos x \sin 2x + x\cos x - \frac{1}{2}\sin x \cos 2x.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція виду

$$\tilde{y} = -\frac{1}{2}\cos x \sin 2x + x\cos x - \frac{1}{2}\sin x \cos 2x + C_1\cos x + C_2\sin x,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 13y = x^2 + 3x + 1$.

Розв'язання. Характеристичним рівнянням відповідного однорідного рівняння є $k^2 - 4k + 13 = 0$, корені якого $k_1 = 2 + 3i$, $k_2 = 2 - 3i$. Отже, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_0(x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Для відшукання частинного розв'язку неоднорідного рівняння праву частину можна подати у вигляді $f(x) = 0 + 0 \cdot x + x^2$. Отже, якщо $\tilde{y}(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$, то $\tilde{y}'(x) = A_1 + 2A_2 x$, $\tilde{y}''(x) = 2A_2$.

Підставляючи замість $\tilde{y}(x)$ та її похідної відповідні значення у ліву частину диференціального рівняння, маємо $2A_2 - 4(A_1 + 2A_2 x) + 13(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = 1 + 3 \cdot x + x^2$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x правої та лівої частин, після деяких спрощень отримаємо

$$\begin{cases} 2A_2 - 4A_1 + 13A_0 = 1, \\ 13A_1 - 8A_2 = 3, \\ 13A_2 = 1. \end{cases}$$

звідки $A_2 = \dfrac{1}{13}$, $A_1 = \dfrac{47}{169}$, $A_0 = \dfrac{331}{2197}$. Отже, частинний розв'язок має вигляд $\tilde{y}(x) = \dfrac{331}{2197} + \dfrac{47x}{169} + \dfrac{x^2}{13}$; загальний розв'язок даного рівняння запишемо так:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{13}x^2 + \frac{47}{169}x + \frac{331}{2197}.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = 4\sin 2x$.

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння має корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Оскільки характеристичне рівняння не має комплексного кореня $2i$, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $\tilde{y}(x) = A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x$. Підставляючи $\tilde{y}(x)$ у дане рівняння, матимемо $(2A_1 - 10B_1)\cos 2x - (16A_1 - 4B_1)\sin 2x = 4\sin 2x$. Звідки

$$\begin{cases} 2A_1 - 10B_1 = 0, \\ 16A_1 - 4B_1 = 0. \end{cases}$$

Отже, $A_1 = \dfrac{5}{19}$, $B_1 = \dfrac{1}{19}$.

Таким чином, $\tilde{y}(x) = \dfrac{5}{19}\cos 2x + \dfrac{1}{19}\sin 2x$; рівняння має такий загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{19}\cos 2x + \frac{1}{19}\sin 2x.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 3 = 65x\cos 2x$.

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння має корені $k_1 = -1$ і $k_2 = -3$. Отже, загальним розв'язком однорідного рівняння є: $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$. Частинний розв'язок шукаємо у такому вигляді: $\tilde{y}(x) = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$. Тоді

$$\tilde{y}'(x) = (A - 2Cx - 2D)\sin 2x + (C + 2Ax + 2B)\cos 2x,$$

$$\tilde{y}''(x) = (-4C - 4B - 4Ax)\sin 2x + (4a - 4D - 4Cx)\cos 2x$$

Підставляючи замість $\tilde{y}(x)$ та її похідних значення у задане рівняння, після деяких спрощень матимемо:

$$[-(A + 8C)x + (4A - B - 4C - 8D)]\sin 2x + [(8A - C)x + \\ + (4A + 8B + 4C - D)]\cos 2x = 65x\cos 2x \quad .$$

Прирівнюючи коефіцієнти правої та лівої частин при відповідних тригонометричних функціях $\sin 2x$ і $\cos 2x$, дістанемо

$$\begin{cases} -(A + 8C)x + (4A + B - 4C - 8D) = 0, \\ (8A - C)x + (4A + 8B + 4C - D) = 65x, \end{cases}$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти правої та лівої частин при однакових степенях x, отримаємо

$$\begin{cases} A + 8C = 0, \\ 4A - B - 4C - 8D = 0, \\ 8A - C = 65, \\ 4A + 8B + 4C - D = 0. \end{cases}$$

Отже, $A = 8, \quad B = \dfrac{188}{65}, \quad C = -1, \quad D = \dfrac{315}{65}$.

Таким чином, загальним розв'язком неоднорідного лінійного рівняння буде

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \left(8x + \frac{188}{65}\right)\cos 2x + \left(-x + \frac{315}{65}\right)\sin 2x .$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$.

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння має корені $k_1 = 0 + 2i$, $k_2 = 0 - 2i$. Отже, загальним розв'язком однорідного рівняння буде: $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $\tilde{y} = (A\cos 2x + B\sin 2x)x$ (помножуємо на x, оскільки корені характеристичного рівняння $\pm i$ збігаються з коефіцієнтом α у функціях $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$ правої частини).

Підставляючи у дане рівняння $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$, маємо $-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\sin 2x + 4\cos 2x$, звідки $A = -1$, $B = 1$. Отже, $y = x(\sin 2x - \cos 2x)$. Таким чином, загальний розв'язок $y = C_1 \cos 2x + C_1 \sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x)$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.
$y''' - 6y'' + 9y' = 0$.

Розв'язання. Задане рівняння – це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Складаємо характеристичне рівняння та знаходимо його корені

$$k^3 - 6k^2 + 9k = 0; \quad k(k^2 - 6k + 9) = 0;$$

$$k_1 = 0; \quad k_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2}; \quad k_2 = k_3 = 3.$$

Корені дійсні і рівні, тому загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_0 + C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Приклад 4. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y'' + y = 6x + 1$, що задовольняє початкові умови: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Знаходимо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння $y'' + y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння та знаходимо його корені

$$k^2 + 1 = 0; \quad k^2 = -1; \quad k_1 = -i, \quad k_2 = i.$$

Корені рівняння комплексно спряжені, тому загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

Його розв'язками будуть функції $y_1 = \cos x$ та $y_2 = \sin x$. За теоремою 4 загальним розв'язком диференціального рівняння $y'' + y = 0$ є функція $y = 6x+1 + C_1\cos x + C_2\sin x$, де C_1 та C_2 – довільні сталі.

Скориставшись заданими початковими уловами знайдемо довільні сталі:

$y = 6x+1 + C_1\cos x + C_2\sin x$; $\quad 1 + C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 1$;

$y' = 6x - C_1\sin x + C_2\cos x$; $\quad 6 - C_1\sin 0 + C_2\cos 0 = 0$;

одержуємо: $C_1=0$, $C_2=-6$. Отже, шуканим розв'язком є функція $y = 6x - 6\sin x + 1$.